Polinomi

I polinomi della forma

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_N \cdot x^N$$

richiedono N potenze, N somme e N moltiplicazioni per essere valutati Un metodo più efficiente (Horner) è

$$p(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + \cdots + x \cdot (a_{N-1} + a_N \cdot x)))$$

che richiede solo N moltiplicazioni e N somme.

In pratica devo fare un ciclo

1. assegno a $p(x)$ il valore a_N

2. per j che va da $N-1$ a 0 scendendo un numero alla volta

3. moltiplico p per x e aggiungo a_j

4. ripeto il punto precedente finché j non raggiunge zero

Esempio: $N = 3$

- $P = a_3$
- $P = P \cdot x + a_2 = a_3 \cdot x + a_2$
- $P = P \cdot x + a_1 = a_3 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_1$
- $P = P \cdot x + a_0 = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Derivate

$$p'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \cdots + N \cdot a_N \cdot x^{N-1}$$

Si possono calcolare in modo analogo ai polinomi e assieme ad essi con il seguente trucco

1. assegno a $p(x)$ il valore a_n
2. assegno a $p'(x)$ il valore 0
3. per j che va da $N-1$ a 0 scendendo un numero alla volta
4. moltiplico $p'(x)$ per x e aggiungo $p(x)$
5. moltiplico $p(x)$ per x e aggiungo a_j
6. ripeto i due punti precedenti finché j non raggiunge zero

Esempio: polinomio di terzo grado

- $D = 0$
- $P = a_3$
- $D = D \cdot x + P = a_3$
- $P = P \cdot x + a_2 = a_3 \cdot x + a_2$
- $D = D \cdot x + P = 2 \cdot a_3 \cdot x + a_2$
- $P = P \cdot x + a_1 = a_3 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_1$
- $D = D \cdot x + P = 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$
- $P = P \cdot x + a_0 = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Divisione di un polinomio

Se x_0 è uno zero di un polinomio dei grado n, $p_n(x)$, questo si può scrivere come

$$p_n(x) = (x - x_0) \cdot p_{n-1}(x)$$

Voglio trovare i coefficienti di $p_{n-1}(x)$ a partire da quelli di $p_n(x)$. Per fare questo esplicito il prodotto

$$(x-x_0)\cdot(a'_0+a'_1x+a'_2x^2+a'_3x^3+\ldots)+R = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

che da'

$$a_0 = R-a'_0\,x_0 \quad a_1 = a'_0-a'_1\,x_0 \quad a_2 = a'_1-a'_2\,x_0 \quad \ldots \quad a_n = a'_{n-1}$$

da cui si trova per a'_j:

$$a'_{n-1} = a_n \quad a'_j = a_{j+1} + a'_{j+1}\,x_0 \quad R = a_0 + a'_0x_0$$

In questo modo, partendo da n, ogni a'_j viene calcolato quando a'_{j+1} è già noto.

Questo procedimento rende particolarmente semplice trovare le radici di un polinomio dato che, trovata la prima, si può ridurre di grado il polinomio e trovare la successiva. Il procedimento si interrompe quando il polinomio è arrivato al grado zero oppure quando non ci sono più radici reali

Radici di equazioni

L'equazione:

$$f(x) = 0$$

ha un numero di soluzioni non note a priori

1. isolo la radice

2. calcolo con precisione il valore

Non c' è un metodo universale per 1). Possibili strategie

- parto da un intervallo e lo allargo fino a includere una radice

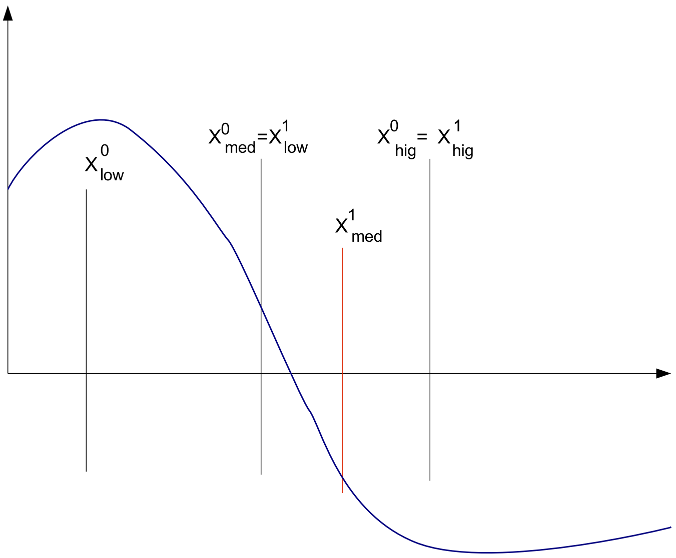
- divido l'intervallo in cui cerco la radice in intervallini $[x_{j-1}, x_j]$ finché

$$f(x_{j-1}) \cdot f(x_j) < 0$$

Isolata la radice la si può calcolare con il metodo di bisezione

Alternativa: parto da uno o due punti e cerco una successione che converga alla radice.

Bisezione



Se in $[x_{low}, x_{hig}]$ esiste una radice e la voglio calcolare con precisione ε suppongo che:

$$f(x_{low}) < 0 \quad \text{e} \quad f(x_{hig}) > 0$$

Prendo allora il punto medio

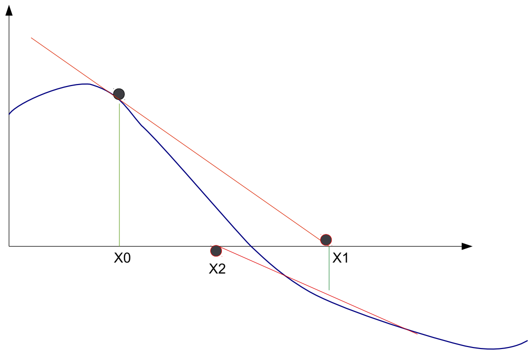
$$x_{med} = \frac{1}{2} \cdot (x_{low} + x_{hig})$$

e calcolo $f(x_{med})$.

- Se $|x_{hig} - x_{low}| < \varepsilon$ termino il ciclo;
- se $f(x_{med})$ e $f(x_{low})$ hanno lo stesso segno ;
  1. $[x_{med}, x_{hig}]$ come nuovo intervallo;
  2. $\frac{1}{2} \cdot (x_{med} + x_{hig})$ è il nuovo punto medio;
- Se $f(x_{med})$ e $f(x_{hig})$ hanno lo stesso segno;
  1. $[x_{low}, x_{med}]$ come nuovo intervallo;
  2. $\frac{1}{2} \cdot (x_{low} + x_{med})$ è il nuovo punto medio;
- ripeto il ciclo;

La precisione dopo N passi è $\frac{1}{2^N}$ volte l'intervallo iniziale.

Metodo di Newton



È applicabile quando si conosce la derivata della funzione. Espando la funzione vicino allo zero

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

supponendo quindi che i termini non lineari si possano trascurare. Se la relazione fosse esatta, e non approssimata al primo ordine, avrei per lo zero α:

$$0 = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (\alpha - x_1)$$

e quindi

$$\alpha = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

In generale però la successione definita da

$$x_{N+1} = x_N - \frac{f(x_N)}{f'(x_N)}$$

può convergere verso un limite finito, e in questo caso il limite è una radice dell'equazione.

Inconvenienti

- la convergenza non è garantita;
- è necessario conoscere la derivata.

Precisione

Chiamo α la radice, quindi $f(\alpha) = 0$. Esisterà allora uno ξ_N, con $\alpha < \xi_N < x_N$ tale che:

$$f(\alpha) - f(x_N) = (\alpha - x_N) \cdot f'(x_N) + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi_N) \cdot (\alpha - x_N)^2$$

da cui, essendo $f(\alpha) = 0$:

$$-\frac{f(x_N)}{f'(x_N)} = (\alpha - x_N) + \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_N)}{f'(x_N)} \cdot (\alpha - x_N)^2$$

$$\alpha - x_N = -\frac{f(x_N)}{f'(x_N)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_N)}{f'(x_N)} \cdot (\alpha - x_N)^2$$

Ricordando che

$$(x_{N+1} - x_N) = -\frac{f(x_N)}{f'(x_N)}$$

trovo

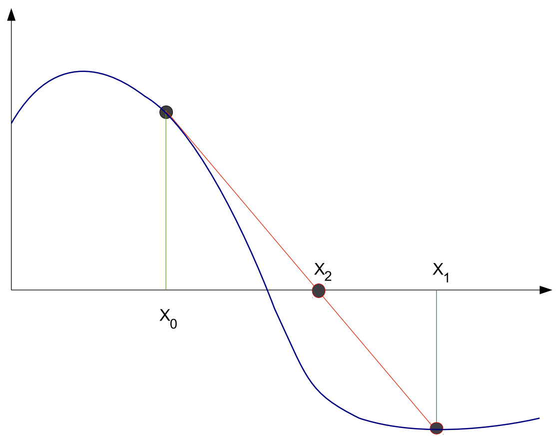
$$\alpha - x_N = (x_{N+1} - x_N) - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_N)}{f'(x_N)} \cdot (\alpha - x_N)^2$$

$$\alpha - x_{N+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_N)}{f'(\xi_N)} \cdot (\alpha - x_N)^2 = C_N \cdot (\alpha - x_N)^2$$

Per $N \to \infty$ $C_N \to C$ purché la derivata non si annulli. l'andamento dell'errore è quindi

$$|\alpha - x_{N+1}| \approx C \cdot |\alpha - x_N|^2$$

Metodo della secante



- È utile quando non si può calcolare la derivata;
- richiede la conoscenza della funzione in due punti per partire.

Attraverso due punti di una curva passa una secante: la posso prolungare fino al punto dove interseca le ascisse. (x_0, f_0) e (x_1, f_1) siano i due punti iniziali

$$\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

Imponendo $f_2 = 0$ si trova il nuovo punto x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f_1}{f_1 - f_0} \cdot (x_1 - x_0)$$

Analogamente i punti successivi sono dati dalla relazione di ricorrenza:

$$x_{N+1} = x_N - \frac{f_N}{f_N - f_{N-1}} \cdot (x_N - x_{N-1})$$

L'errore è dato da

$$|\alpha - x_{N+1}| \approx C \cdot |\alpha - x_N| \cdot |\alpha - x_{N-1}|$$

Metodi di punto fisso

Un punto x_0 per cui valga

$$g(x_0) = x_0$$

si dice punto fisso di $g(x)$. Posto $f(x) = g(x) + x$ si ha

$$g(x_0) = f(x_0) + x_0 = x_0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

Esiste quindi una stretta relazione tra punti fissi e zeri. Un modo per trovare gli zeri di una funzione $f(x)$ è trovare i punti fissi di $g(x) = f(x) + x$.

Il metodo più semplice consiste nel definire la successione

$$x_{N+1} = g(x_N)$$

il cui limite è un punto fisso (se esiste finito). questa successione non è però l'unica scelta possibile: ad esempio, l'equazione

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

è equivalente a

$$x^2 - 2x + 2 = x$$

ma anche a

$$3 - \frac{2}{x} = x$$

che hanno gli stessi punti fissi, ma possono avere diverse proprietà di convergenza

x_N converge in un intervallo $[a, b]$ se per ogni $x, y \in [a, b]$ vale

$$|g(x) - g(y)| < k \cdot |x - y| \qquad k < 1$$