Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt$$

Mi interessano tre casi

- $f(t)$ *è periodica in* $[0, T]$*;*
- $f(t)$ *ha valori trascurabili fuori da* $[0, T]$*;*
- *il comportamento di* $f(t)$ *in* $[0, t]$ *è rappresentativo dell'andamento della funzione dappertutto, cioè contiene tutta l'informazione che posso estrarre.*

Posso allora troncare l'integrale tra 0 e T

$$F(\nu) = \int_{0}^{T} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt$$

e quindi discretizzarlo

$$F(\nu) \approx \Delta t \sum_{0}^{N-1} f(j\Delta t)e^{-2\pi i\nu j\Delta t}dt$$

Valuto la FT a intervalli $\Delta\nu$ fissati

$$F_k \approx \Delta t \sum_{0}^{N-1} f_j e^{-2\pi ikj\Delta\nu\Delta t}dt$$

Usando la notazione $F_k = F(k\Delta\nu)$ e $f_j = f(j\Delta t)$

$$F_k \approx \Delta t \sum_{0}^{N-1} f_j e^{-2\pi i k j \Delta\nu \Delta t} dt$$

Infine scelgo

$$\Delta\nu\Delta t = 1/N \text{ con } \Delta t = T/N \text{ e } \Delta\nu = 1/T$$

e trascuro il fattore Δt ottenendo

$$F_k \approx \sum_{j=0}^{N-1} f_j \; e^{-2\pi i k j/N}$$

È meglio fissare la costante in modo che sia soddisfatto il teorema di Parseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |f_j|^2$$

che da' per la costante il valore $1/\sqrt{N}$. In pratica si definisce la FT diretta come

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\,2\pi k j/N} f_j$$

e quella inversa come

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\,2\pi k j/N} f_j$$

- *La definizione del segno dell'esponente varia però da autore ad autore*;
- *invece di tempo/frequenza il linguaggio usato è spesso posizione/impulso*
- *due approssimazioni: discretizzo l'integrale e taglio le frequenze*;
- *discretizzare porta via informazione (frequenza di Nyquist)*;

Se $F_k = 0$ *per frequenze* $|f_k| > f_c = \frac{1}{2\Delta t}$ *la trasformata di Fourier non perde informazione, altrimenti tutto ciò che sta a* $|f_k| > f_c$ *si sposta nella regione* $|f_k| < f_c$ *con effetti imprevedibili, ed è necessario un campionamento più fine*

FT discreta

Teoricamente occorrono N^2 moltiplicazioni e altrettante somme per calcolare la DFT

$$F_N^k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi kj/N} f_j = \sum_{j=0}^{N-1} W_N^{kj} f_j \quad W_N = e^{-i2\pi/N}$$

W_N ha le proprietà

$$W_N^2 = W_{N/2} \quad W_N^{N/2} = -1 \quad W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

Posso però spezzare la somma in due parti

$$F_N^k = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k(2m)}{N}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k(2m+1)}{N}}$$

$$F_N^k = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi km}{N/2}} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi km}{N/2}}$$

$$F_N^k = F_{N/2}^{(e)k} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} F_{N/2}^{(o)k} = F_{N/2}^{(e)k} + W_N^k F_{N/2}^{(o)k}$$

Questo mi permette di calcolare i primi $N/2$ punti.

Per calcolare gli ultimi $N/2$ noto che

$$
\begin{aligned}
F_N^{k+N/2} &= \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(k+N/2)m}{N/2}} \\
&+ e^{\mathrm{i}\frac{2\pi(k+N/2)}{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(k+N/2)m}{N/2}}
\end{aligned}
$$

$$F_N^{k+N/2} = F_{N/2}^{(e)k} + W_N^{k+N/2} F_{N/2}^{(o)k} = F_{N/2}^{(e)k} - W_N^k F_{N/2}^{(o)k}$$

Ho due trasformate di Fourier di $N/2$ punti ciascuna, che posso memorizzare rispettivamente nei primi $N/2$ e nei secondi $N/2$ elementi.

$$W_N^k = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

L'angolo $\frac{2\pi k}{N}$ raddoppia quando N si dimezza

Per svolgere più facilmente le operazioni, è utile avere il vettore da trasformare già nell'ordine giusto, ciè

$$\underbrace{f_0\, f_2\, f_4\, f_6} \quad \underbrace{f_1\, f_3\, f_5\, f_7}$$

I primi quattro termini daranno la trasformata pari e i successivi quella dispari

Posso proseguire spezzando la FT a 4 punti in trasformate pari e dispari, riordinando cosìgli elementi del vettore originario

$$\underbrace{f_0\, f_4} \quad \underbrace{f_2\, f_6} \quad \underbrace{f_1 f_5} \quad \underbrace{f_3\, f_7}$$

Sarebbe utile avere un criterio per ordinare fin dall'inizio il vettore in modo da poter usare subito le trasformate pari e dispari

Procedimento ricorsivo

Definisco $F^{(e)k}$ e $F^{(o)k}$ le trasformate di Fourier pari e dispari.

- mi sono ridotto a fare due trasformate di Fourier di $N/2$ punti.
- dove memorizzo $F^{(e)k}$ e $F^{(o)k}$?
- nelle successive ricorrenze ho $F_k^{eoeeeooe}$
- c'è una relazione tra la sequenza pari-dispari e k?
- sostituisco e con zero e o con uno e ottengo un numero binario j
- cerco una relazione tra k e j

Inversione di bit

Scrivo k come numero binario

- *Se k è pari va nella metà inferiore, quindi $j < N/2$;*
- *se k è pari ha il bit inferiore nullo;*
- *se $j < N/2$, j ha il bit più alto nullo;*
- *se $k/2$ è dispari, va nel quarto superiore della metà inferiore, e il secondo bit dal basso è uno;*
- *quindi $N/4 \leq j \leq N/2 - 1$, e il secondo bit dall'alto è uno;*
- *in generale j si ottiene da k scambiando l'ordine dei bit.*

N^o	bit	bit inversi	bit-inverso
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Implementazione numerica

- *Il valore del bit-invertito dipende dal numero di punti* N
- *per fissare le idee, supponiamo che* $N = 8 = 2^3$*. I numeri da invertire saranno tra* 0 *e* 7 *ed avranno tre cifre binarie*;
- *Se un numero ha il bit più basso uguale a uno, il suo bit-reversed avrà il bit più alto uguale a 1: ad esempio "001" ha come bit-reversed "100"*;
- *per selezionare un particolare bit posso usare l'operatore "and" che agisce sui bit: ad esempio il terzo bit più basso di* i *sarà non nullo se* i &"100" *non è nullo*;
- *una volta trovato il bit giusto per il bit reversed, lo si moltiplica per due per spostare il bit verso l'alto.*

nel caso di due soli punti

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

Inoltre da

$$F_k = F_k^e + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} F_k^{(o)}$$

ho

$$F_{k+N/2} = F_k^e - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} F_k^{(o)}$$

che mi permette di calcolare F_k con $0 \le k \le N-1$ conoscendo $F^{(e)}$ e $F^{(o)}$ per $0 \le k \le N/2-1$.

Infine devo calcolare $\cos(\frac{2\pi k}{N})$ e $\sin(\frac{2\pi k}{N})$ per diversi k e lo stesso N. Il calcolo delle funzioni trigonometriche è dispendioso in termini di tempo

$$\begin{aligned} \cos(\frac{2\pi(k+1)}{N}) = & \cos(\frac{2\pi k}{N})\cos(\frac{2\pi}{N}) \\ - & \sin(\frac{2\pi k}{N})\sin(\frac{2\pi}{N}) \end{aligned}$$

e analogamente per $\sin(\frac{2\pi(k+1)}{N})$, per cui riconduco i calcoli successivi a somme e moltiplicazioni.

Funzione spettrale

Per una data grandezza $f(t)$ periodica posso calcolare o misurare l'autocorrelazione

$$C(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t+\tau)\cdot f(t)$$

Il teorema di Wiener-Kinchine mi dice allora che

$$S(\nu) = FT(C(t)) = FT(f(t))^2$$

dove $S(\nu)$ è la funzione spettrale, una grandezza che mi permette di evidenziare il contenuto in frequenza (o energia) di una grandezza fisica.

la trasformata di Fourier discreta esiste anche quando non ha senso parlare di quella continua.

- funzioni periodiche nel tempo (serie di Fourier);
- segnali random a tempi costanti (correlazioni);

Esercizi

- La trasformata di Fourier di $e^{-x^2/2}$ è $e^{-q^2/2}$.
- calcolare la FT di un oscillatore armonico con $\omega = 1$ e la sua funzione spettrale;
- vedere come cambiano le cose se

$$V(x) = x^4/4 - x^2/2$$