Interpolazione e Approssimazione

Dato un insieme di punti di ascisse e ordinate (x_j, f_j) mi serve qualche volta di avere a disposizione una funzione, di solito con proprietà particolari, che passi per tutti questi punti, all'interno dell'intervallo tra i punti di ascissa minima e massima. Si possono scegliere diversi tipi di funzione che passano per questi N punti, ed il procedimento di trovare una di queste funzioni è detto **interpolazione**

Se voglio invece trovare il valore di una funzione definita in $[a, b]$ per $x < a$ oppure $x > b$ basandomi sulla conoscenza di punti in $[a, b]$, parlo di **estrapolazione**. In questo caso i risultati sono molto più incerti.

Metodo di Lagrange

Un metodo semplice per interpolare N punti è quello dei polinomi di Lagrange. Per fare un esempio il polinomio che passa per tre punti può essere scritto come

$$P(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

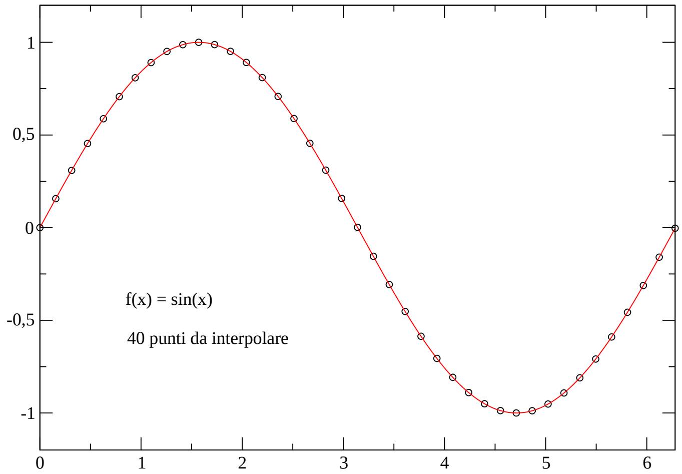
$$f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

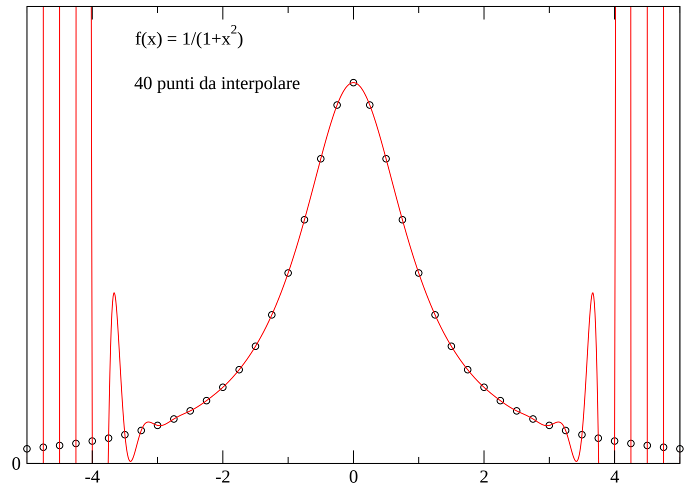
Il polinomio interpolatore di grado N che interpola N punti ha la forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} f_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Si può dimostrare che questo polinomio è unico.

La capacità di questo polinomio di rappresentare la funzione anche al di fuori degli n punti dipende dalla funzione: a titolo di esempio sono mostrati i polinomi interpolatori di $\sin(x)$ e di $1/(1+x^2)$ per 40 punti.





Questi esempi dimostrano che una soluzione così semplice può non funzionare anche per funzioni con ottime proprietà di continuità.

Inoltre il tempo per calcolare l'interpolazione non è piccolo.

Spline cubiche

Voglio una funzione che sia almeno continua con derivate prime e seconde; in ogni intervallo $[x_{j-1}, x_j]$ chiedo che la funzione sia un polinomio di terzo grado. Nei punti estremi devo imporre le condizioni di continuità per la funzione e le sue derivate prime e seconde

La funzione è cubica, quindi le sue derivate seconde sono lineari. Chiamo M_j le derivate seconde in x_j. Allora

$$s_j^{''}(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

Posto $h_j = x_j - x_{j-1}$

$$s_j^{'}(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + C_j$$

$$\begin{aligned} s_j(x) \ &= M_{j-1}\tfrac{(x_j-x)^3}{6h_j} + M_j\tfrac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j} \\ &\quad + C_j(x - x_{j-1}) + E_j \end{aligned}$$

Condizioni ai limiti

Devo imporre

$$s(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad \text{e} \quad s(x_j) = f_j$$

e quindi

$$f_{j-1} = M_{j-1}\frac{h_j^2}{6} + E_j$$

$$f_j = M_j\frac{h_j^2}{6} + C_j h_j + E_j$$

$$E_j = f_{j-1} - M_{j-1}\frac{h_j^2}{6}$$

$$C_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1})$$

Impongo ora che la spline nell'intervallo j si raccordi con quella nell'intervallo $j+1$. Questo è già vero per la funzione (avendo imposto che sia uguale a f_{j-1} e f_j agli estremi) e per le derivate seconde (avendo scelto M_j in modo indipendente dall'intervallo). Rimane da imporre la continuità delle derivate prime.

Continuità delle derivate

In x_j

$$M_j \frac{h_j}{2} + C_j = -M_j \frac{h_{j+1}}{2} + C_{j+1}$$

$$M_j \frac{h_j}{2} + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1}) =$$

$$-M_j \frac{h_{j+1}}{2} + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j)$$

Scrivendo questa come equazione per gli M_j ottengo

$$l_j M_{j-1} + 2M_j + u_j M_{j+1} = y_j$$

con

$$l_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \quad u_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$$

$$y_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

Si possono anche imporre le due condizioni:

$$2M_0 + u_0 M_1 = y_0 \quad l_N M_{N-1} + 2M_N = y_N$$

che è l'equazione lineare associata ad una matrice tridiagonale

Approssimazione

Se $f(x)$ è difficile da calcolare (impiega molto tempo) e mi servono i suoi valori solo con una certa precisione cerco di approssimarla. La validità dell'approssimazione non può dipendere da x, quindi voglio la migliore approssimazione *uniforme*

Uso i polinomi di Chebychev definiti da

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \qquad -1 \leq x \leq 1$$

da cui si possono facilmente derivare le relazioni di ricorrenza

$$T_0(x) = 1, \;\; T_1(x) = x, \;\; T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

e di ortogonalità

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{array}{cc} 0 & (n \neq m) \\ \pi & (n = m = 0) \\ \pi/2 & (n = m \neq 0) \end{array}$$

Definendo

$$c_j = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)T_{j-1}(x_k) \quad x_k = \cos\left(\frac{\pi(k-\frac{1}{2})}{N}\right)$$

e scrivendo

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{N} c_j T_{j-1}(x) - \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}c_1 + \sum_{j=2}^{N} c_j T_{j-1}(x)$$

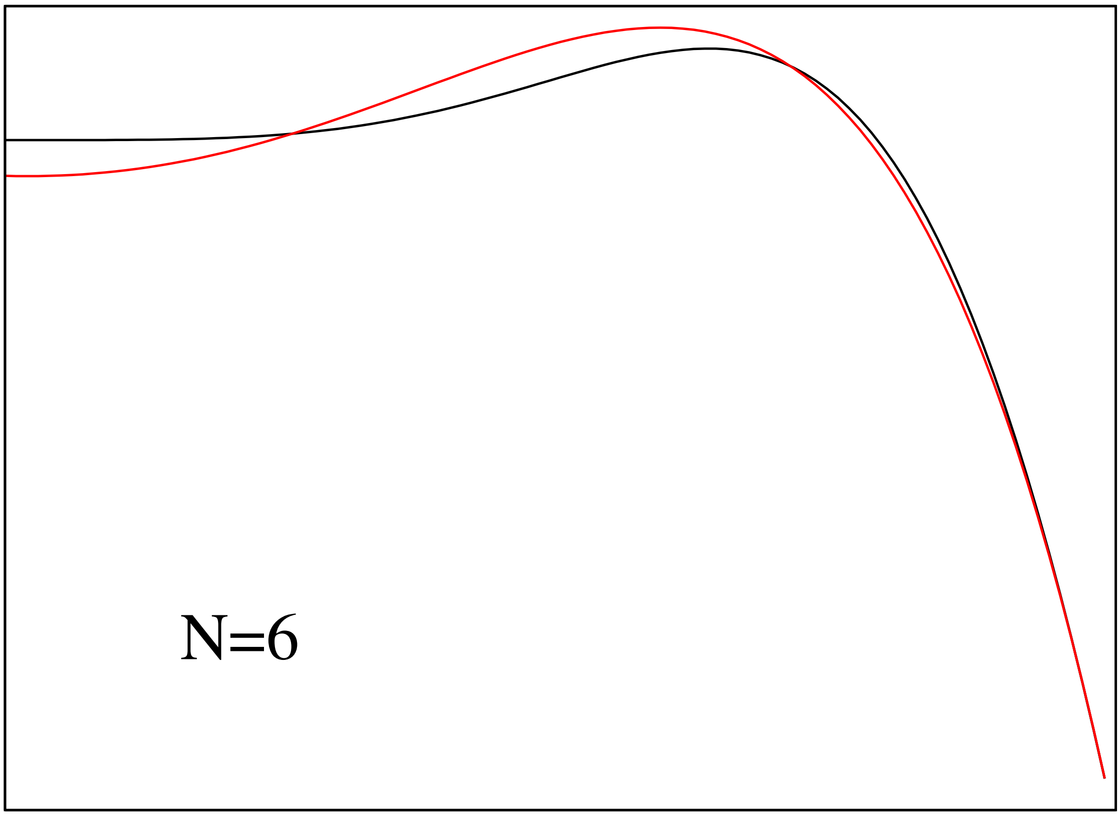
Si trova che per $x = x_k$ l'approssimazione è esatta e che altrove è una delle migliori approssimazioni uniformi, cioè indipendenti da x.

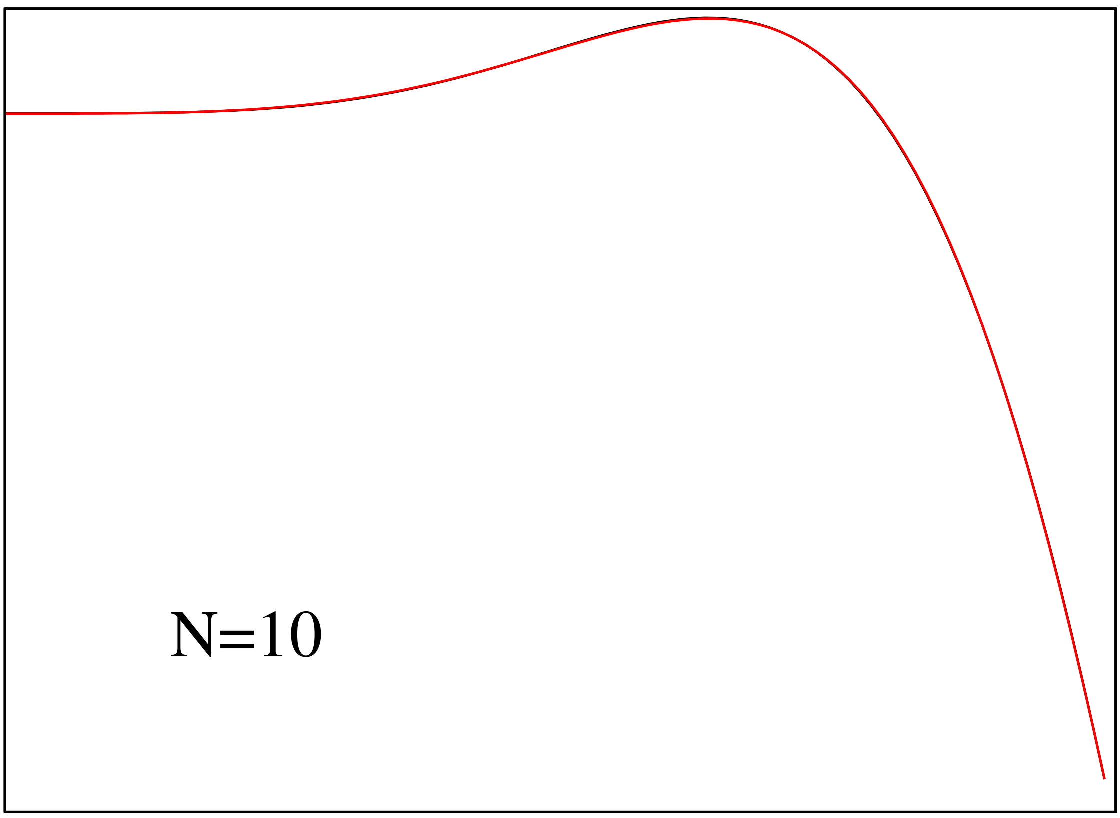
Se la funzione $f(x)$ è definita tra a e b posso definire

$$g(x) = f\left(\frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)$$

e approssimarla tra -1 e $+1$

$x^3 e^x \sin(4x)$





Integrazione con i polinomi di Chebychev

Una volta approssimata la funzione posso pensare di integrarla integrando la funzione approssimata

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} c_k \int_{-1}^{+1} T_{k-1}(x)dx - c_1$$

L'integrale di T_k può essere valutato facilmente con una sostituzione di variabile

$$\int_{-1}^{+1} T_k(x)dx = \int_{0}^{\pi} T_k(\cos(y))\sin(y)dy =$$

$$\int_{0}^{\pi} \cos(k \cdot y)\sin(y)dy = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}$$

se k è pari, zero altrimenti. Per $k = 0$ l'integrale vale 2. In conclusione si può integrare con la formula

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx c_1 + \sum_{k=3}^{N} c_k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-2})$$