Decomposizione LU

Cerco di scrivere

$$A = LU$$

con L triangolare inferiore, U triangolare superiore e $l_{ii} = 1 \quad i = 0, \ldots, N-1$. Allora il sistema di equazioni

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

diventa

$$LU\vec{x} = \vec{b}$$

e posto

$$U\vec{x} = \vec{y}$$

devo risolvere due sistemi triangolari

$$L\vec{y} = \vec{b} \qquad \text{e} \qquad U\vec{x} = \vec{y}$$

Il tempo di soluzione è quindi $O(N^2)$ se la matrice A è LU-decomposta.

Se ho M sistemi di equazioni

$$A\vec{x}_i = \vec{b}_i$$

posso fare la decomposizione una volta sola per tutti gli M sistemi e impiegherò $1/M$ del tempo necessario con l'eliminazione gaussiana.

Per ricavare L e U osservo che la prima parte dell'eliminazione gaussiana, che azzera la prima colonna sotto la diagonale si ottiene anche moltiplicando A per

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{10} & 1 & 0 \\ -l_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{10} & 1 & 0 \\ -l_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} - l_{10}a_{00} & a_{11} - l_{10}a_{01} & a_{12} - l_{10}a_{02} \\ a_{20} - l_{20}a_{00} & a_{21} - l_{20}a_{01} & a_{22} - l_{20}a_{02} \end{pmatrix}$$

Scegliendo ora opportuni valori di $l_{i0} = a_{i0}/a_{00}$ si azzera la prima colonna. Moltiplicando poi il risultato per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

si azzera la seconda colonna sotto la diagonale. Iterando il procedimento

$$L_{N-1}^{-1} L_{N-2}^{-1} \cdots L_1^{-1} A$$

ha tutti gli elementi sotto la diagonale nulli ed è quindi triangolare superiore. Questa è la matrice U. Chiamando

$$L^{-1} = L_{N-1}^{-1} L_{N-2}^{-1} \cdots L_1^{-1}$$

ho che

$$L^{-1} A = U \qquad \text{e quindi} \qquad A = LU$$

Resta da dimostrare che L è triangolare inferiore con elementi diagonali uguali ad uno. L'inverso di

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{10} & 1 & 0 \\ -l_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{è} \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 \\ l_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infatti

$$L_1^{-1} L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{10} & 1 & 0 \\ -l_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 \\ l_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{10} + l_{10} & 1 & 0 \\ -l_{20} + l_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 \\ l_{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 \\ l_{20} & l_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_N \cdot L_{N-1} \cdots L_1 = \left(L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_N^{-1} \right)^{-1}$$

è una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali uguali a 1

Soluzione di sistemi LU-decomposti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 \\ l_{20} & l_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & y_0 = b_0 \\ & l_{10}\, y_0 + y_1 = b_1 \\ & l_{20}\, y_0 + l_{21}\, y_1 + y_2 = b_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & y_0 = b_0 \\ & y_1 = b_1 - l_{10}\, y_0 \\ & y_2 = b_2 - l_{20}\, y_1 - l_{21}\, y_1 \end{aligned}$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} l_{ij}\, y_j$$

$$\begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & u_{22}\, x_2 = y_2 \\ & u_{11}\, x_1 + u_{12}\, x_2 = y_1 \\ & u_{00}\, x_0 + u_{01}\, x_1 + u_{02}\, x_2 = y_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x_2 = y_2 / u_{22} \\ & x_1 = (y_1 - u_{12}\, x_2)\, / u_{11} \\ & x_0 = (y_2 - u_{01}\, x_1 - u_{02}\, x_2)\, / u_{00} \end{aligned}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{N-1} u_{ij}\, x_j}{u_{ii}}$$

Calcolo esplicito di L e U

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 \\ l_{20} & l_{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Scrivendo la matrice prodotto LU esplicitamente

$$\begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ l_{10}u_{00} & l_{10}u_{01} + u_{11} & l_{10}u_{02} + u_{12} \\ l_{20}u_{00} & l_{20}u_{01} + l_{21}u_{11} & l_{20}u_{02} + l_{21}u_{12} + u_{22} \end{pmatrix}$$

Le prime 3 equazioni sono già risolte.
Le successive danno

$$\begin{array}{ll} l_{i0} = a_{i0}/u_{00} & 0 \leq i \leq N-1 \\ u_{1i} = a_{1i} - l_{10}u_{0i} & 1 \leq i \leq N-1 \\ l_{21} = (a_{21} - l_{20}u_{02})/u_{11} & \\ u_{22} = a_{22} - l_{20}u_{02} - l_{21}u_{12} & \end{array}$$

Matrici Tridiagonali

Si chiamano così se $a_{i,i}, a_{i+1,i}, a_{i,i+1}$ sono gli unici elementi diversi da zero.

La decomposizione assume una forma semplice

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & 0 & 0 \\ 0 & u_{11} & u_{12} & 0 \\ 0 & 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Si possono ora scrivere le equazioni per gli elementi $a_{i,i+1}$

$$a_{01} = u_{01} \qquad a_{12} = u_{12} \qquad a_{23} = u_{23}$$

per cui i $u_{i,i+1}$ sono subito determinati. Per gli elementi diagonali

$$a_{00} = u_{00} \quad a_{11} = l_{10}u_{01} + u_{11}$$

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} \quad a_{33} = l_{32}u_{23} + u_{33}$$

e per quelli sotto la diagonale principale

$$a_{10} = l_{10}u_{00} \quad a_{21} = l_{21}u_{11} \quad a_{32} = l_{32}u_{22}$$

L'ordine in cui calcolo i vari l e u è molto importante

1. calcolo $u_{i,i+1}$

2. calcolo $l_{i+1,i}$ e $u_{i,i}$ nella sequenza:

$$u_{00} \to l_{10} \to u_{11} \to l_{21} \to u_{22} \to l_{32} \to u_{33}$$

In generale, per una matrice di ordine N, la formula di risoluzione sarà:

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} \qquad u_{00} = a_{00}$$

$$u_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1}u_{i-1,i} \qquad l_{i+1,i} = a_{i+1,i}/u_{i,i}$$

Nota bene

- il procedimento di decomposizione è, in questo caso, $O(N)$, mentre in generale è $O(N^3)$;

- poiché anche la backsubstitution è $O(N)$, un sistema di equazioni tridiagonali può essere risolto con un algoritmo $O(N)$.

Matrici sparse

- Qualche volta si ha a che fare con matrici che hanno pochi elementi diversi dall'unità o che differiscono, per pochi elementi o in modo speciale, da matrici che si sanno invertire efficientemente

- in questi casi possono esistere algoritmi che trovano la matrice inversa rapidamente

- l'algoritmo dipende da come è fatta la matrice

- un caso particolare è quello di una matrice $a_{ij} + u_i \cdot v_j$ quando si conosce l'inversa di A

Chiamo

$c_{ij} = (A^{-1})_{ij} \qquad a'_{ij} = a_{ij} + u_i v_j \qquad c'_{ij} = (A'^{-1})_{ij}$

C' è quindi la matrice inversa che devo ottenere, mentre conosco C. Scrivo allora la condizione $C'A' = 1$

$$\begin{aligned} c'_{ik} a'_{kj} &= (c_{ik} + r_{ik}) \left(a_{kj} + u_k v_j \right) = \delta_{ij} \\ c_{ik} a_{kj} &+ r_{ik} a_{kj} + r_{ik} u_k v_j + c_{ik} u_k v_j = \delta_{ij} \\ r_{ik} a_{kj} &= -r_{ik} u_k v_j - c_{ik} u_k v_j \end{aligned}$$

Moltiplicando per c_{jl} e sommando su j

$$r_{il} = -v_j c_{jl} \left(c_{ik} u_k + r_{ik} u_k \right) =$$

Moltiplico per u_l e sommo su l

$$\begin{aligned} r_{il} u_l &= -v_j c_{jl} u_l \left(c_{ik} u_k + r_{ik} u_k \right) \\ &= -\lambda \left(c_{ik} u_k + r_{ik} u_k \right) \\ &= -\lambda c_{ik} u_k - \lambda r_{ik} u_k \end{aligned}$$

$$(1 + \lambda) r_{il} u_l = -\lambda c_{ik} u_k$$
$$r_{il} u_l = -\tfrac{\lambda}{1+\lambda} c_{ik} u_k$$

Sostituendo nell'equazione per r_{il} e ricordando che $c'_{il} = c_{il} + r_{il}$ questo da' finalmente

$$c'_{il} = c_{il} - \frac{v_j c_{jl} u_k c_{ik}}{1 + \lambda}$$

Esercizio

Scrivere un programma che calcoli la matrice inversa di

$$a_{ij} = \delta_{ij} + u_i \cdot v_j$$