Ricorrenza

Il problema dei conigli

Un allevatore compra una coppia di conigli appena nati. Dopo due mesi i conigli sono in grado di riprodursi, dando vita ad un'altra coppia di conigli; questa può riprodursi dopo altri due mesi. Supponendo che nessun coniglio muoia, qual è il numero totale delle coppie di conigli dopo N mesi?

Ogni coppia presente in un mese è presente anche il mese successivo, mentre quelle presenti due mesi prima fanno aumentare di uno il numero di coppie.La successione del numero di coppie è

$$1, 1, 1+1=2, 2+1=3, 3+2=5, \ldots$$

e, in generale

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \text{con} \quad u_0 = 1 \quad \text{e} \quad u_1 = 1$$

Si può affrontare il problema al calcolatore in due modi

- mettere tutti i numeri in un vettore (se non sono troppi)

- applicare la formula spostando n

```
Esempio 1
u[0]=1
u[1]=1
per n che va da 2 a N
  u[n]=u[n-1]+u[n-2]
ripeti

Esempio 2
unm2=1
unm1=1
per n che va da 2 a N
  un = unm1 + unm2
  unm2 = unm1
  unm1 = un
ripeti
```

Formula di Binet

Cerco una successione come quella di Fibonacci ma fatta a potenza

$$q^N = q^{N-1} + q^{N-2}$$

che implica

$$q^2 = q + 1$$

e che ha due soluzioni

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

allora qualunque successione della forma

$$u_N = c_1 \cdot q_1^N + c_2 \cdot q_2^N$$

avrà ancora la stessa relazione di ricorrenza. In particolare con

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

trovo $u_0 = 1$ e $u_1 = 1$

Poiché $|q_2| < 1$, per $N \to \infty$ il contributo di q_2^N scompare e $u_N \approx c_1 \cdot q_1^N$

Polinomi ortogonali

Molti polinomi sono importanti per la Fisica. Spesso li caratterizza una relazione di ricorrenza che permette anche di calcolarli.

1. - Polinomi di Legendre
   - $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$
   - $(N+1)P_{N+1} = (2N+1)xP_N(x) - NP_{N-1}(x)$
   - $\dfrac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n$
2. - Polinomi di Hermite
   - $H_0(x) = 1, H_1(x) = x$
   - $H_{N+1} = 2 \cdot xH_N(x) - 2 \cdot N \cdot H_{N-1}(x)$
3. - Polinomi di Laguerre
   - $L_0^a(x) = 1, L_1^a(x) = 1 + a - x$
   - $(N+1)L_{N+1}^a = (2N+1+a-x) \cdot L_N^a(x)$
     $- (N+a) \cdot L_{N-1}^a(x)$
4. - Polinomi di Chebychev
   - $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$
   - $T_{N+1} = 2 \cdot x \cdot T_N(x) - T_{N-1}(x)$
   - $T_n\big(\cos(x)\big) = \cos(nx)$

Integrali dei polinomi

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx &= \delta_{nm}\frac{2}{2n+1} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x) &= \delta_{nm}2^n n!\sqrt{\pi} \\
\int_{0}^{\infty} e^{-x} L_n^a(x)L_m^a(x) &= \delta_{nm}\frac{\Gamma(n+a+1)}{n!} \\
\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \delta_{nm}\frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \delta_{nm}\pi \quad \text{se } n \text{ è } 0
\end{aligned}$$

Funzioni associate di Legendre

Sono importanti nel calcolo delle armoniche sferiche

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos(\theta))e^{im\phi}$$

P_l^m sono le *funzioni associate di Legendre*.Per $m = 0$ sono i polinomi di Legendre.

Posso calcolarle tramite una relazione di ricorrenza

1. $P_m^m(x) = (-1)^m(2m-1)!!(1-x^2)^{m/2}$
2. $P_{m+1}^m(x) = (2m+1)xPm^m(x)$
3. $(l-m)P_l^m(x) = (2l-1)xP_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x)$

Funzioni di Bessel e ricorsione inversa

Le funzioni di Bessel sferiche possono essere definite da

$$j_0(x) = \sin(x)/x \quad j_1(x) = \sin(x)/x^2 - \cos(x)/x$$

$$j_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n-1}(x)$$

Se x è piccolo, $(2n+1)/x$ è grande Cosa succede in una ricorrenza in cui

$$u_{n+1} = K u_n - u_{n-1}$$

con K molto grande? Cerco la risposta in una ricorrenza della forma

$$q^{n+1} = K q^n - q^{n-1} \quad q^2 - Kq + 1 = 0$$

che ha soluzione

$$q_\pm = (K \pm \sqrt{K^2 - 4})/2$$

che dà circa

$$q_+ = K \quad q_- = \frac{1}{K}$$

e quindi

$$u_n = A_+ q_+^n + A_- q_-^n$$

Se $A_+ = 0$, basta un piccolo errore numerico perché la soluzione corrispondente a q_+ prevalga comunque: dopo la prima iterazione dovrei avere $u_1 = A_- q_-^n$, ma in realtà ho introdotto un errore che, per i numeri in doppia precisione, è dell'ordine di 10^{-16}. Quello che ho ottenuto è quindi

$$u_n = A_- q_- + \varepsilon A_+ q_+$$

dove per semplicità posso assumere che A_+ e A_- siano entrambi vicini ad uno. Se questo è l'unico errore numerico che faccio (cosa molto improbabile), dopo n iterazioni ho

$$u_n = A_- q_-^n + \varepsilon A_+ q_+^n$$

Il rapporto tra i due termini è

$$\frac{\varepsilon A_+ q_+^n}{A_- q_-^n} \sim \varepsilon \left(\frac{q_+}{q_-} \right)^n = \varepsilon K^{2n}$$

Si vede quindi che, per $K = 10$ e $n = 8$, i due termini sono confrontabili, mentre per $n = 16$ il primo termine sparisce e la soluzione non ha più nulla a che fare con quella che cercavo.

Per ovviare a questo inconveniente parto da u_n e faccio la ricorsione all'indietro

$$u_0 = A_+/q_+^n + A_-/q_-^n$$

che fa prevalere il termine che dipende da q_- In pratica considero la formula inversa

$$j_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x)$$

con valori iniziali $j_N(x)$ e $j_{N-1}(x)$ casuali e $N \gg n$ Imponendo il giusto valore di $j_0(x)$ troverò anche $j_n(x)$.

Esercizio

Considero il potenziale generato da una distribuzione di carica così fatta:

$$\rho = \rho_0 \cos^4(\theta) \quad r < R_0 \quad \text{e} \quad \rho = 0 \quad \text{altrimenti}$$

attorno alla direzione di un certo asse.

Il potenziale sull'asse è allora

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{R_0} r'^2 dr' \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \cdot$$
$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho_0 \cos^4(\theta)}{z^2\sqrt{1 - (r'/z)\cos(\theta) + (r'^2/z^2)}}$$
$$V(z) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 z^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R_0^{l+3}}{(l+3)z^l} \int_{-1}^{+1} dx x^4 P_l(x)$$

Fare un grafico dell'andamento di $\varepsilon_0 V(z)/\rho_0$ al variare di z includendo i vari termini di multipolo e prendendo $R_0 = 1\ cm$