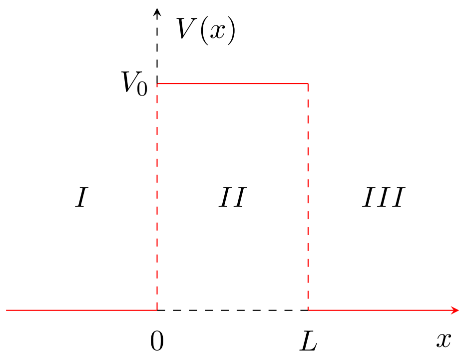
Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

# Barriera di potenziale




L'equazione di Schrödinger nelle zone I e III dà

$$\frac{d^2\psi_{I,III}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_{I,III} = 0 \ ,$$

nella zona II

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi_{II} = 0 \ .$$

## 1 Caso $E > V_0$

Supponendo $E > V_0$ e nella zona III solo onde progressive, si ha

$$\begin{aligned}
&\psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \ , && \psi'_I = ik\left(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}\right) \ , && j_I = \frac{\hbar k}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right) \ , \\
&\psi_{II} = Ce^{ik_1x} + De^{-ik_1x} \ , && \psi'_{II} = ik_1\left(Ce^{ik_1x} - De^{-ik_1x}\right) \ , && j_{II} = \frac{\hbar k_1}{m}\left(|C|^2 - |D|^2\right) \ , \\
&\psi_{III} = Fe^{ikx} \ , && \psi'_{III} = ikFe^{ikx} \ , && j_{III} = \frac{\hbar k}{m}|F|^2 \ ,
\end{aligned}$$

avendo posto $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ e $k_1 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. Dal raccordo nei punti $x = 0$ e $x = L$ seguoni i due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = C + D \\ k(A - B) = k_1(C - D) \end{array} \right. \ , \quad \left\{ \begin{array}{l} Ce^{ik_1L} + De^{-ik_1L} = Fe^{ikL} \\ k_1\left(Ce^{ik_1L} - De^{-ik_1L}\right) = kFe^{ikL} \end{array} \right. . \tag{1}$$

Dal secondo sistema in (1) si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} 2Ce^{ik_1L} = \frac{k_1+k}{k_1}Fe^{ikL} \\ 2De^{-ik_1L} = \frac{k_1-k}{k_1}Fe^{ikL} \end{array} \right. \ , \quad \text{cioè:} \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{2k_1}{k_1+k}e^{i(k_1-k)L}C \\ D = \frac{k_1-k}{k_1+k}e^{2ik_1L}C \end{array} \right. .$$

Sostituendo l'ultima espressione di $D$ nel primo sistema in (1) si ottiene

$$A = \frac{1}{2k(k + k_1)}\left[(k + k_1)^2 - (k - k_1)^2e^{2ik_1L}\right]C \ , \quad B = \frac{k - k_1}{2k}\left(1 - e^{2ik_1L}\right)C \ .$$

Quindi alla fine si ha

$$\frac{B}{A} = \frac{\left(k^2 - k_1^2\right)\left(1 - e^{2ik_1L}\right)}{(k+k_1)^2 - (k-k_1)^2 e^{2ik_1L}} \ , \qquad \frac{C}{A} = \frac{2k(k+k_1)}{(k+k_1)^2 - (k-k_1)^2 e^{2ik_1L}} \ ,$$
$$\frac{D}{A} = \frac{2k(k_1-k)e^{2ik_1L}}{(k+k_1)^2 - (k-k_1)^2 e^{2ik_1L}} \ , \qquad \frac{F}{A} = \frac{4kk_1 e^{i(k_1-k)L}}{(k+k_1)^2 - (k-k_1)^2 e^{2ik_1L}} \ .$$

Passando al quadrato dei moduli si ottiene

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\left(k^2 - k_1^2\right)^2 \sin^2 k_1L}{4k^2k_1^2 + \left(k^2 - k_1^2\right)^2 \sin^2 k_1L} \ , \qquad \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{k^2\left(k+k_1\right)^2}{4k^2k_1^2 + \left(k^2 - k_1^2\right)^2 \sin^2 k_1L} \ ,$$
$$\left|\frac{D}{A}\right|^2 = \frac{k^2\left(k-k_1\right)^2}{4k^2k_1^2 + \left(k^2 - k_1^2\right)^2 \sin^2 k_1L} \ , \qquad \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k^2k_1^2}{4k^2k_1^2 + \left(k^2 - k_1^2\right)^2 \sin^2 k_1L} \ .$$

Si noti che

$$J_I = J_{II} = J_{III} = \frac{\hbar}{m}\frac{4k^3k_1^2}{4k^2k_1^2 + \left(k^2 - k_1^2\right)^2 \sin^2 k_1L}|A|^2 \ .$$

I coefficienti di riflessione $R$ e di trasmissione $T$ sono dati da

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{V_0^2 \sin^2 k_1L}{4E(E-V_0) + V_0^2 \sin^2 k_1L} \ , \qquad T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0) + V_0^2 \sin^2 k_1L} \ , \qquad R + T = 1 \ .$$

## 2 Caso $E = V_0$

Per $E = V_0$ nella zona II si ha

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = 0 \implies \psi_{II} = Cx + D \ , \qquad j_{II} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(CD^*\right) \ .$$

Le condizioni di continuità danno

$$\begin{cases} A + B = D \\ ik(A-B) = C \end{cases} \ , \qquad \begin{cases} CL + D = Fe^{ikL} \\ C = ikFe^{ikL} \end{cases} \ .$$

da cui

$$\frac{B}{A} = -\frac{ikL}{2-ikL} \ , \qquad \frac{C}{A} = \frac{2ik}{2-ikL} \ , \qquad \frac{D}{A} = \frac{2(1-ikL)}{2-ikL} \ , \qquad \frac{F}{A} = \frac{2e^{-ikL}}{2-ikL} \ ,$$
$$J_I = J_{II} = J_{III} = \frac{\hbar}{m}\frac{4k}{4+k^2L^2}|A|^2 \ .$$

I coefficienti $R$ e $T$ sono

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{k^2L^2}{4+k^2L^2} = \left(1 + \frac{2\hbar^2}{mV_0L^2}\right)^{-1} \ , \qquad T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4}{4+k^2L^2} = \left(1 + \frac{mV_0L^2}{2\hbar^2}\right)^{-1} \ .$$

Queste formule si trovano come caso limite del caso precedente.

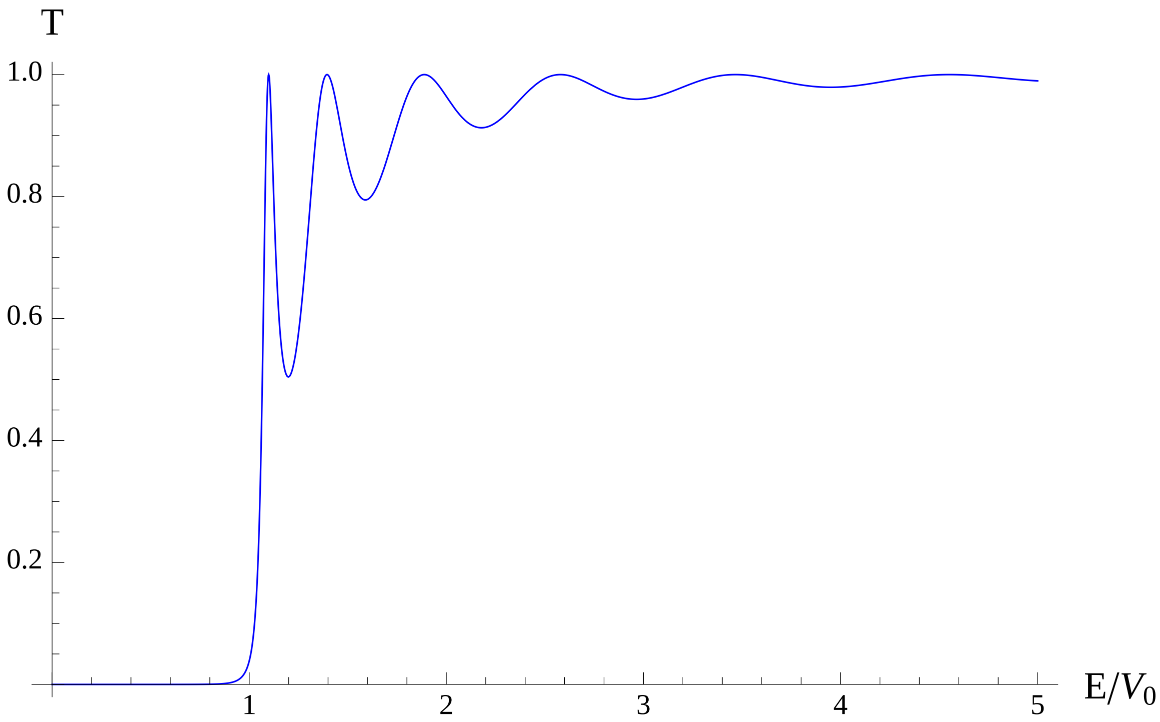



**Figura 1:** Coefficiente di trasmissione $T$ in funzione di $E/V_0$ per $\frac{L}{\hbar}\sqrt{2mV_0} = 10$.

## 3 Caso $E < V_0$

Il caso $E < V_0$ si ottiene dal caso $E > V_0$ ponendo $k = -i\bar{k}$ dove $\bar{k} = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Perciò, ricordando che $\sin(-i\bar{k}L) = -i\sinh\bar{k}L$, si ha

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\left(k^2+\bar{k}^2\right)^2\sinh^2\bar{k}L}{4k^2\bar{k}^2+\left(k^2+\bar{k}^2\right)^2\sin^2\bar{k}L}\ , \qquad \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{k^2\left(k^2+\bar{k}^2\right)e^{-2\bar{k}L}}{4k^2\bar{k}^2+\left(k^2+\bar{k}^2\right)^2\sinh^2\bar{k}L}\ ,$$

$$\left|\frac{D}{A}\right|^2 = \frac{k^2\left(k^2+\bar{k}^2\right)e^{2\bar{k}L}}{4k^2\bar{k}^2+\left(k^2+\bar{k}^2\right)^2\sinh^2\bar{k}L}\ , \qquad \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k^2\bar{k}^2}{4k^2\bar{k}^2+\left(k^2+\bar{k}^2\right)^2\sinh^2\bar{k}L}\ .$$

Poiché

$$j_{II} = \frac{2\hbar\bar{k}}{m}\mathrm{Im}\left(CD^*\right)\ ,$$

si ha

$$J_I = J_{II} = J_{III} = \frac{\hbar}{m}\frac{4k^3\bar{k}^2}{4k^2\bar{k}^2+\left(k^2+\bar{k}^2\right)^2\sinh^2\bar{k}L}|A|^2\ .$$

I coefficienti di riflessione e di trasmissione sono ora dati da

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{V_0^2\sinh^2\bar{k}L}{4E(V_0-E)+V_0^2\sinh^2\bar{k}L}\ , \qquad T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E)+V_0^2\sinh^2\bar{k}L} = 1-R\ .$$

L'andamento del coefficiente di trasmissione $T$ in funzione dell' energia è dato in Figura 1 per il valore della costante adimensionata $\frac{L}{\hbar}\sqrt{2mV_0} = 10$.