Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prof. Gianluca Grignani

Composizione di un momento angolare generico $\vec{j}$ con uno di spin $\frac{1}{2}$, $\vec{S}$

$$\vec{j}^2\varphi_j^m = \hbar^2 j(j+1)\varphi_j^m \ , \qquad j_z\varphi_j^m = \hbar m\varphi_j^m \ ,$$

$$\vec{S}^2\chi_{m'} = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_{m'} \ , \qquad S_z\chi_{m'} = \hbar m'\chi_{m'} \ , \qquad (m' = \pm\frac{1}{2}) \ ,$$

Sia

$$\vec{J} = \vec{j} + \vec{S} \ , \qquad \vec{J}^2 = \vec{j}^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + j_+S_- + j_-S_+ + 2j_zS_z \ ,$$

dove $j_\pm$ e $S_\pm$ agiscono sulle autofunzioni come segue

$$j_\pm\varphi_j^m = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\varphi_j^{m\pm 1} \ , \qquad S_\pm\chi_\mp = \hbar\chi_\pm \ , \qquad S_\pm\chi_\pm = 0 \ .$$

Cerchiamo le autofunzioni di $\vec{J}^2$ e di J_z (e di $\vec{j}^2$ e $\vec{S}^2$)

$$\vec{J}^2\Psi_J^M = \hbar^2 J(J+1)\Psi_J^M \ , \qquad J_z\Psi_J^M = \hbar M\Psi_J^M \ .$$

Per soddisfare la seconda equazione dovrà essere

$$\Psi_J^M = c_+\varphi_j^{M-1/2}\chi_+ + c_-\varphi_j^{M+1/2}\chi_- \ .$$

Per soddisfare la prima equazione si ha

$$\left[j(j+1) + \frac{3}{4} + M - \frac{1}{2}\right] c_+\varphi_j^{M-1/2}\chi_+ + \left[j(j+1) + \frac{3}{4} - M - \frac{1}{2}\right] c_-\varphi_j^{M+1/2}\chi_-$$
$$+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - M^2}\left(c_+\varphi_j^{M+1/2}\chi_- + c_-\varphi_j^{M-1/2}\chi_+\right) = J(J+1)\left(c_+\varphi_j^{M-1/2}\chi_+ + c_-\varphi_j^{M+1/2}\chi_-\right) \ ,$$

da cui il sistema omogeneo per c_+ e c_-:

$$\begin{cases} \left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - J(J+1) + M\right] c_+ + \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - M^2}\, c_- = 0 \\ \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - M^2}\, c_+ + \left[\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - J(J+1) - M\right] c_- = 0 \end{cases}$$

Annullando il determinante si ha $J = j \pm \frac{1}{2}$ (se $j = 0$ allora $J = j + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$). Risolvendo e normalizzando

$$\text{per} \quad J = j + \frac{1}{2} \ , \qquad c_\pm = \sqrt{\frac{j \pm M + \frac{1}{2}}{2j+1}}$$

$$\text{per} \quad J = j - \frac{1}{2} \ , \qquad c_\pm = \mp\sqrt{\frac{j \mp M + \frac{1}{2}}{2j+1}}$$

Riassumendo

$$\Psi^M_{J=j+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{j+M+\frac{1}{2}}{2j+1}}\,\varphi_j^{M-1/2}\chi_+ + \sqrt{\frac{j-M+\frac{1}{2}}{2j+1}}\,\varphi_j^{M+1/2}\chi_- \ ,$$

$$\Psi^M_{J=j-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{j-M+\frac{1}{2}}{2j+1}}\,\varphi_j^{M-1/2}\chi_+ + \sqrt{\frac{j+M+\frac{1}{2}}{2j+1}}\,\varphi_j^{M+1/2}\chi_- \ .$$

a) Caso $j = \frac{1}{2}$. Composizione di due spin $\frac{1}{2}$

$$\vec{j} \equiv \vec{S}_1 \ , \qquad \vec{S} \equiv \vec{S}_2 \ , \qquad \vec{J} \equiv \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \qquad (J \equiv S = 0, 1) \ .$$

– stato di "singoletto" :

$$\Psi^0_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)} - \chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)}\right)$$

– stati di "tripletto" :

$$\Psi^{\pm 1}_1 = \chi_\pm^{(1)}\chi_\pm^{(2)} \ , \qquad \Psi^0_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)} + \chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)}\right)$$

b) Caso $j = \ell$. Composizione, per esempio, del momento angolare orbitale con quello di spin per una particella di $\frac{1}{2}$

$$\vec{j} \equiv \vec{L} \ , \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \ , \qquad J = \ell \pm \frac{1}{2} \ ,$$

$$\Psi^M_{J=\ell+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\ell+M+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\,Y_\ell^{M-1/2}(\theta,\varphi)\chi_+ + \sqrt{\frac{\ell-M+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\,Y_\ell^{M+1/2}(\theta,\varphi)\chi_- \ ,$$

$$\Psi^M_{J=\ell-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{\ell-M+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\,Y_\ell^{M-1/2}(\theta,\varphi)\chi_+ + \sqrt{\frac{\ell+M+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\,Y_\ell^{M+1/2}(\theta,\varphi)\chi_- \ .$$