

## 1 Equazioni di Maxwell nei corpi materiali (unità Gauss)

Introdotti due tensori elettromagnetici  $F^{\lambda\mu}$  e  $H^{\lambda\mu}$  definiti come

$$F^{\lambda\mu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad H^{\lambda\mu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

le equazioni di Maxwell si scrivono in forma covariante

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad \begin{cases} (\nu = 1, 2, 3) & \text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ (\nu = 0) & \text{div} \vec{D} = 4\pi \rho; \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \begin{cases} (\lambda, \mu, \nu) = \begin{cases} (0, 1, 2) \\ (2, 3, 0) \\ (3, 0, 1) \end{cases} & \text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0; \\ (\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3) & \text{div} \vec{B} = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$J^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}).$$

La densità di forza che si esercita su di un elemento di carica in movimento è

$$f^\mu = \frac{1}{c} H^{\mu\nu} J_\nu \equiv \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{j}}{c}, \vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right).$$

Decomponiamo ora la corrente  $J_\mu$  in corrente di conduzione  $J_\mu^c$  e di convezione  $J_\mu^k$ , in modo tale che nel sistema di quiete del conduttore la prima posseda solo la componente spaziale e la seconda la componente spaziale diverse da zero:

$$J_\mu = J_\mu^c + J_\mu^k, \quad J_\mu^k = \frac{1}{c^2} u_\mu J_\lambda u^\lambda, \quad u^\mu \equiv (c\gamma, \gamma \vec{v}).$$

Allora la legge di Ohm (microscopica) assume la forma

$$J_\mu^c = \frac{\sigma}{c} H_{\mu\nu} u^\nu \equiv \left( c\rho^c = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}^c}{c}, \vec{j}^c = \sigma \gamma \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \right)$$

e le equazioni di collegamento sono

$$F_{\lambda\mu} u^\mu = \epsilon H_{\lambda\mu} u^\mu, \quad H_{\lambda\mu} u_\nu + H_{\mu\nu} u_\lambda + H_{\nu\lambda} u_\mu = \mu (F_{\lambda\mu} u_\nu + F_{\mu\nu} u_\lambda + F_{\nu\lambda} u_\mu),$$

corrispondenti a

$$\vec{D} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} = \epsilon \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} = \mu \left( \vec{H} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{D} \right) \quad (3)$$

o, risolvendo rispetto a  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$ ,

$$\vec{D} = \frac{1}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \left\{ \epsilon\vec{E}(1 - \beta^2) + (\epsilon\mu - 1) \left[ \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H} - \epsilon\frac{1}{c^2}(\vec{v} \cdot \vec{E})\vec{v} \right] \right\} ,$$

$$\vec{B} = \frac{1}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \left\{ \mu\vec{H}(1 - \beta^2) - (\epsilon\mu - 1) \left[ \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E} + \mu\frac{1}{c^2}(\vec{v} \cdot \vec{H})\vec{v} \right] \right\} .$$

Si vede immediatamente che nel vuoto ( $\epsilon = \mu = 1$ ) si ha  $\vec{D} = \vec{E}$  e  $\vec{B} = \vec{H}$  ed i tensori  $F_{\lambda\mu}$  e  $H_{\lambda\mu}$  coincidono.

Una connessione tra  $F_{\lambda\mu}$  e  $H_{\lambda\mu}$  si ha tramite il tensore dei momenti

$$H^{\lambda\mu} = F^{\lambda\mu} + 4\pi M^{\lambda\mu} , \quad M^{\lambda\mu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ -P_x & 0 & -M_z & M_y \\ -P_y & M_z & 0 & -M_x \\ -P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} , \quad (4)$$

dove  $\vec{P}$  e  $\vec{M}$  sono, rispettivamente, l'intensità di polarizzazione e di magnetizzazione. La relazione scritta, eq.(4), equivale alle equazioni della teoria di Maxwell:

$$\vec{E} = \vec{D} - 4\pi\vec{P} , \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} .$$

Dalle proprietà di trasformazione di  $M_{\lambda\mu}$  segue, in particolare, che un corpo che nel suo sistema di quiete sia polarizzato elettricamente, ma non magnetizzato, appare ad un osservatore in moto anche magnetizzato. Viceversa, un corpo che nel sistema di quiete sia solo magnetizzato, sembra possedere un momento elettrico quando è in movimento.

Proprietà di trasformazione dei campi per un boost lungo la direzione  $x$  (ad esempio per  $H_{\lambda\mu}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x , \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) , \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) , \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = B_x , \\ B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) , \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) ; \end{array} \right. \quad (5)$$

ovvero, per un boost in una direzione generica

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} , \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) , \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} , \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}) . \end{array} \right. \quad (6)$$

Dalle regole di trasformazione del tensore dei momenti, per un boost lungo la direzione  $x$ , si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_x = P_x , \\ P'_y = \gamma(P_y - \beta M_z) , \\ P'_z = \gamma(P_z + \beta M_y) , \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M'_x = M_x , \\ M'_y = \gamma(M_y + \beta P_z) , \\ M'_z = \gamma(M_z - \beta P_y) . \end{array} \right. \quad (7)$$

Nel caso in cui il corpo nel sistema in quiete non sia magnetizzato ( $\vec{M} = 0$ ), nel limite di piccole velocità, si ha

$$\vec{P}' = \vec{P} \quad \vec{M}' = \vec{P} \times \frac{\vec{v}}{c} .$$

La prima terna delle equazioni di Maxwell, eq.(1), per corpi in movimento lento, si può quindi scrivere nella forma

$$\text{rot} \left( \vec{B} - 4\pi \vec{P} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j} ,$$

così che il sistema completo delle equazioni di Maxwell per i mezzi in moto, nel caso di piccole velocità e di mezzi non magnetizzabili, è il seguente

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (8)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 , \quad (9)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left[ \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot} \left( \vec{P} \times \vec{v} \right) \right] , \quad (10)$$

$$\text{div} \left( \vec{E} + 4\pi \vec{P} \right) = 4\pi \rho . \quad (11)$$

### 1.1 Esperienza di Fizeau

Se  $u_0$  è la velocità di propagazione della luce in un mezzo materiale in quiete, la sua velocità di propagazione  $u$  in un mezzo che si muove con velocità  $v$  sarà data da

$$u = u_0 + kv$$

per la propagazione nel senso del moto e da

$$u = u_0 - kv$$

per la propagazione in senso opposto. Il coefficiente  $k$  viene detto *coefficiente di trascinamento*, se  $k$  fosse uguale ad uno, la velocità della luce e del mezzo si comporrebbero vettorialmente. Il primo tentativo di misurare sperimentalmente il valore del coefficiente di trascinamento fu fatto da Fizeau nel 1851 e il risultato dell'esperienza di Fizeau fu:

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Cerchiamo ora di spiegare questo risultato in base alle formule ottenute nel paragrafo precedente (8)-(11). Le equazioni fondamentali del campo elettromagnetico in un isolante non magnetizzabile scarico, che si muove con velocità  $\vec{v}$  ( $\vec{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\mu = 1$ ), secondo le (8)-(11), sono

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi \text{rot} \left( \vec{P} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) , \quad \text{div} \vec{D} = 0 \quad (12)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad \text{div} \vec{B} = 0 , \quad (13)$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} , \quad 4\pi \vec{P} = (\epsilon - 1) \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) . \quad (14)$$

L'ultima delle (14) segue dalle equazioni di collegamento (3). Confrontiamo queste equazioni con le usuali equazioni di Maxwell per un mezzo in quiete:

$$\text{rot}\vec{H} = \text{rot}\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div}\vec{D} = 0 \quad (15)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div}\vec{B} = 0, \quad (16)$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad 4\pi\vec{P} = (\epsilon - 1)\vec{E}. \quad (17)$$

Esistono due differenze essenziali tra questi due sistemi di equazioni. Primo, il termine  $\frac{4\pi}{c} \text{rot}(\vec{P} \times \vec{v})$ , che esprime il trascinamento convettivo dello stato di polarizzazione. È la causa per cui l'induzione magnetica  $\vec{B}$  nei mezzi in movimento, nonostante l'ipotesi  $\mu = 1$ , non coincide con l'intensità del campo magnetico  $\vec{H}$ , come nel caso dei mezzi in quiete. Un'altra differenza consiste nel fatto che la polarizzazione  $\vec{P}$  non dipende più esclusivamente dall'intensità del campo elettrico, ma anche dall'induzione magnetica; infatti su di una carica in movimento agisce la forza di Lorentz:  $\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$ .

Vogliamo ora cercare una soluzione delle equazioni che corrisponda ad un'onda piana; facciamo a questo scopo e titolo tentativo la seguente posizione:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{u})}, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{u})} \quad (18)$$

da cui segue

$$\vec{P} = \vec{P}_0 e^{i\omega(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{u})}, \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i\omega(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{u})} \quad (19)$$

Qui  $\omega$  indica la frequenza,  $u$  la velocità ed  $\hat{n}$  la direzione di propagazione dell'onda. Dobbiamo ora determinare i valori costanti  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{P}_0$ ,  $\vec{D}_0$  e la velocità dell'onda  $u$  in modo che siano soddisfatte le equazioni (12)-(14). Nel caso di un mezzo in quiete l'introduzione di (18) e (19) nel sistema di equazioni (15)-(17) dà le note formule:

$$\begin{aligned} -\hat{n} \times \vec{B}_0 &= \frac{u}{c} \vec{D}_0, & \hat{n} \cdot \vec{D}_0 &= \epsilon \hat{n} \cdot \vec{E}_0 = 0, \\ \hat{n} \times \vec{E}_0 &= \frac{u}{c} \vec{B}_0, & \hat{n} \cdot \vec{B}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

che indicano che in questo caso i vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e quindi anche  $\vec{D}$  e  $\vec{P}$  sono diretti normalmente alla direzione di propagazione  $\hat{n}$  e che inoltre l'induzione  $\vec{B}$  è normale ai vettori elettrici. Inoltre dalle equazioni (20) segue che la velocità dell'onda è legata alla costante dielettrica  $\epsilon$  dalla formula  $u = u_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ .

Le cose vanno altrimenti nel caso di un mezzo in movimento. L'introduzione di (18) e (19) nel sistema di equazioni (12)-(14) porta alle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} -\hat{n} \times \vec{B}_0 &= \frac{u}{c} \vec{D}_0 - \frac{4\pi}{c} \hat{n} \times (\vec{P}_0 \times \vec{v}), & \hat{n} \cdot \vec{D}_0 &= 0, \\ \hat{n} \times \vec{E}_0 &= \frac{u}{c} \vec{B}_0, & \hat{n} \cdot \vec{B}_0 &= 0, \\ 4\pi\vec{P}_0 &= (\epsilon - 1) \left( \vec{E}_0 + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0 \right), \\ \vec{D}_0 &= \epsilon \vec{E}_0 + (\epsilon - 1) \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Da queste si deduce che  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  sono normali ad  $\hat{n}$  non però in generale al vettore elettrico  $\vec{E}$ ; infatti dall' equazione:

$$\hat{n} \cdot \vec{D}_0 = \epsilon \hat{n} \cdot \vec{E}_0 + (\epsilon - 1) \hat{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0 = 0 ,$$

si vede che  $\hat{n} \cdot \vec{E}$  è diverso da zero quando i tre vettori  $\hat{n}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$ , non giacciono sullo stesso piano. Analogamente per l' intensità del campo magnetico  $\vec{H} = \vec{B} - \frac{4\pi}{c} \vec{P} \times \vec{v}$ . Ciò mostra che generalmente quando la direzione del moto e la direzione di propagazione non coincidono il vettore di Poynting non ha la direzione di propagazione dell' onda. Per i calcoli che seguono, conviene esprimere  $\vec{E}_0$  e  $\vec{P}_0$  nelle equazioni (21) per mezzo di  $\vec{D}_0$  e  $\vec{B}_0$ ; evidentemente si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \frac{1}{\epsilon} \vec{D}_0 - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0 , \\ 4\pi \vec{P}_0 &= \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \left( \vec{D}_0 + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_0 \right) . \end{aligned} \quad (22)$$

Limitiamoci a piccole velocità in modo da poter trascurare i termini dell' ordine di  $\beta^2$  in confronto all' unità; allora sostituendo le (22) nelle prime due equazioni (21), tenendo conto che è  $\hat{n} \cdot \vec{B}_0 = \hat{n} \cdot \vec{D}_0 = 0$  si ha:

$$\begin{aligned} -\hat{n} \times \vec{B}_0 &= \left( \frac{u}{c} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) \vec{D}_0 , \\ \frac{1}{\epsilon} \hat{n} \times \vec{D}_0 &= \left( \frac{u}{c} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) \vec{B}_0 . \end{aligned} \quad (23)$$

Dalla (23) risulta che nel caso  $\beta^2 \ll 1$ , anche  $\vec{B}_0$  è perpendicolare a  $\vec{D}_0$ . Eliminando ora  $\vec{B}_0$  e  $\vec{D}_0$  per sostituzione, si ottiene, essendo  $\hat{n} \cdot \vec{B}_0 = \hat{n} \cdot \vec{D}_0 = 0$ , l' equazione:

$$\left( \frac{u}{c} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)^2 = \frac{1}{\epsilon}$$

oppure, risolvendola

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \hat{n} \cdot \vec{v}$$

Essendo poi l'indice di rifrazione del mezzo  $n$  dato da  $n = \sqrt{\epsilon}$  e  $\frac{c}{n} = u_0$ , si ha:

$$u = u_0 + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \hat{n} \cdot \vec{v}$$

come legge generale per il movimento della luce in una direzione qualsiasi. Questo risultato si può interpretare intuitivamente dicendo che la luce nella sua propagazione in un mezzo in movimento viene trascinata nella direzione del moto e precisamente la grandezza di questo trascinamento è determinata dal coefficiente di trascinamento

$$k = 1 - \frac{1}{n^2} .$$

## 2 Invarianza di gauge ed equazioni per i potenziali

Limitiamoci d'ora in poi al vuoto ( $\epsilon = \mu = 1$ ,  $H_{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu}$ ). Le equazioni di Maxwell omogenee sono soddisfatte automaticamente se si pone

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} , \quad \left( \vec{B} = \text{rot} \vec{A} , \quad \vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) ,$$

con  $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$  definito a meno di una trasformazione di gauge

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} .$$

Il gruppo di equazioni di Maxwell non omogeneo diventa

$$\square A_\mu - \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu .$$

Sfruttando l'arbitrarietà dei potenziali si può imporre la condizione di Lorentz

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 .$$

Le equazioni di Maxwell sono allora sostituite da

$$\square A_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu , \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 . \quad (24)$$

Questa è la *gauge di Lorentz*.  $A_\mu$  è definito ora a meno di una trasformazione speciale di gauge ( $\square \Lambda = 0$ ).

*Gauge di Coulomb*. Esiste un'altra gauge ed è quella definita (in un dato sistema di riferimento) da:

$$\text{div} \vec{A} = 0 ,$$

allora l'equazione per il potenziale  $\varphi$  è

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho ,$$

cioè la stessa che per il campo statico; la soluzione è

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} .$$

Il potenziale vettore soddisfa l'equazione

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} .$$

Si ha

$$\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{grad} \int d\vec{r}' \frac{\text{div}' \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \vec{j}_t .$$

L'ultima uguaglianza segue dalla decomposizione<sup>1</sup>

$$\vec{j} = \vec{j}_\ell + \vec{j}_t , \quad \text{rot} \vec{j}_\ell = 0 , \quad \text{div} \vec{j}_t = 0 .$$

Allora si ha

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_t$$

da cui il nome di *gauge trasversa* per la gauge di Coulomb. La gauge di Coulomb si usa spesso in assenza di sorgenti, allora  $\varphi = 0$  e  $\square \vec{A} = 0$ .

<sup>1</sup>Dato un campo vettoriale  $\vec{v}$  tale che  $\text{div} \vec{v} = 4\pi \rho$  e  $\text{rot} \vec{v} = 4\pi \vec{c}$  lo si può decomporre nel modo seguente  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  dove  $\text{rot} \vec{v}_1 = 0$ ,  $\text{div} \vec{v}_1 = 4\pi \rho$  e  $\text{rot} \vec{v}_2 = 4\pi \vec{c}$ ,  $\text{div} \vec{v}_2 = 0$ . Per  $\vec{v}_1$  si ha immediatamente

$$\vec{v}_1 = -\text{grad} \chi , \quad \text{dove} \quad \chi = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' .$$

Per  $\vec{v}_2$  si può porre  $\vec{v}_2 = \text{rot} \vec{u}$  (con  $\text{div} \vec{u} = 0$ ). Per cui  $\text{rot} \text{rot} \vec{u} = 4\pi \vec{c}$ , cioè:  $\text{grad} \text{div} \vec{u} - \Delta \vec{u} = 4\pi \vec{c}$ , ovvero  $\Delta \vec{u} = -4\pi \vec{c}$ . Allora

$$\vec{u} = \int \frac{\vec{c}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' .$$

### 3 Tensore energia-impulso

Nel vuoto la densità di forza diventa

$$f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} J_\nu$$

e si può scrivere

$$f_\mu = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\rho\nu}}{\partial x^\rho} = -\frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (25)$$

dove il *tensore energia-impulso* è dato da

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\lambda} F^\nu_\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right),$$

cioè

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \frac{S_y}{c} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ \frac{S_z}{c} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad T^\mu_\mu = 0. \quad (26)$$

$T^{\mu\nu}$  è un tensore di rango due, simmetrico, a traccia nulla, le cui componenti sono costituite dal *tensore di Maxwell, o degli sforzi elettromagnetici*

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[ -E_i E_k - B_i B_k + \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + B^2) \right] \quad (27)$$

dalla densità di energia

$$u = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

e dal vettore di Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}.$$

### 4 Teoremi di conservazione

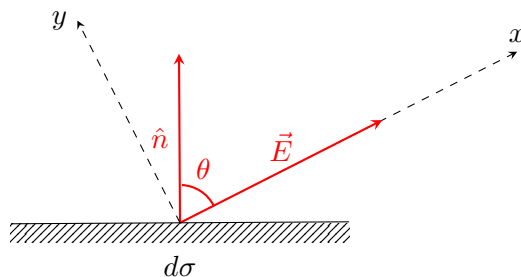
Dalla espressione della densità di forza come quadridivergenza di  $T^{\mu\nu}$ , (25), seguono le due leggi di conservazione seguenti (la prima corrisponde alla prima equazione cardinale della dinamica in cui si tiene conto anche dei campi):

$$\frac{d}{dt} (P_i^{(m)} + P_i^{(c)}) = - \int_\sigma T_{ik} n_k d\sigma, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} (T^{(m)} + U^{(c)}) = - \int_\sigma \vec{S} \cdot \hat{n} d\sigma, \quad (29)$$

dove  $\vec{P}^{(m)}$  e  $T^{(m)}$  sono le quantità di moto e l'energia delle masse (cariche) contenute nel volume  $V$  racchiuso nella superficie  $\sigma$  e

$$\vec{P}^{(c)} = \frac{1}{c^2} \int_V \vec{S} dV, \quad U^{(c)} = \int_V u dV,$$



**Figura 1:** Elemento di superficie.

sono, conseguentemente, la quantità di moto e l'energia del campo contenuto in  $V$ . Il teorema dell'energia prende il nome di *teorema di Poynting*. Per illustrare meglio il significato del tensore di Maxwell supponiamo che sia presente solo il campo  $\vec{E}$ .

Consideriamo un elemento di superficie  $d\sigma$ , ed una scelta degli assi in modo che  $\vec{E}$  sia diretto lungo l'asse  $x$  come in figura 1:

$$\hat{n} \equiv (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \vec{E} \equiv (E, 0, 0),$$

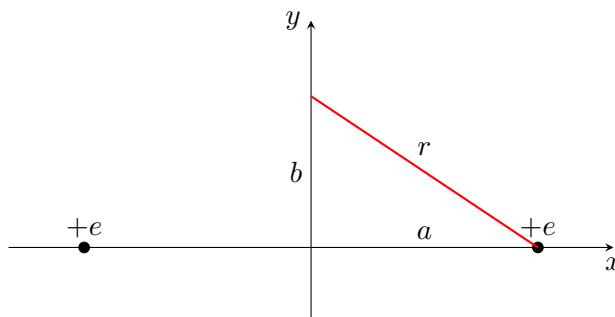
le componenti spaziali del tensore di Maxwell (27) sono

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8\pi}E^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8\pi}E^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8\pi}E^2 \end{pmatrix}.$$

Definiamo  $\vec{T}$ , un vettore di componenti

$$\vec{T} \equiv \left( -\frac{1}{8\pi}E^2 \cos \theta, \frac{1}{8\pi}E^2 \sin \theta, 0 \right), \quad T_i \equiv T_{ik}n_k$$

Quindi quando  $\vec{E}$  (indipendentemente dal segno) è perpendicolare a  $d\sigma$  il tensore esercita soltanto una trazione, quando  $\vec{E}$  giace nel piano di  $d\sigma$  il tensore esercita una pressione. Per  $\theta = 45^\circ$  esiste una tensione pura. Applichiamo quanto detto, come esempio al caso di due cariche puntiformi sull'asse  $x$  a distanze  $+a$  e  $-a$  dall'origine, figura 2.



**Figura 2:** Dipolo.

Come volume del sistema prendiamo la semisfera limitata dal piano ( $yz$ ) e dalla metà di sinistra di una superficie sferica di centro l'origine e di raggio tendente all'infinito (che non contribuisce perché su di essa  $\vec{T}$  va come  $1/r^4$ ).



Nel caso di cariche di segno concorde si ha

$$\vec{E} = \left( 0, 2\frac{e}{r^2}\frac{y}{r}, 2\frac{e}{r^2}\frac{z}{r} \right),$$

$$|\vec{T}| = \frac{1}{8\pi}E^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{e^2}{r^6}(y^2 + z^2) = \frac{e^2}{2\pi}\frac{b^2}{(a^2 + b^2)^3},$$

$$\int |\vec{T}| d\sigma = \frac{e^2}{2} \int_0^\infty db \frac{2b \cdot b^2}{(a^2 + b^2)^3} = \frac{e^2}{2} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^3} = \frac{e^2}{2a^2} \int_0^\infty d\mu \frac{\mu}{(1 + \mu)^3} = \frac{e^2}{(2a)^2}.$$

Infine per cariche opposte

$$\vec{E} = \left( 2\frac{e}{r^2}\frac{a}{r}, 0, 0 \right),$$

$$|\vec{T}| = \frac{e^2}{2\pi}\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^3},$$

$$\int |\vec{T}| d\sigma = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty 2\pi db \cdot b \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^3} = \frac{e^2}{2} a^2 \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda}{(a^2 + \lambda)^3} = \frac{e^2}{2a^2} \int_0^\infty d\mu \frac{1}{(1 + \mu)^3} = \frac{e^2}{(2a)^2}.$$

## 5 Soluzione ritardata dei potenziali

Nella gauge di Lorentz le equazioni dei potenziali sono (24)

$$\square A_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Una soluzione particolare di queste equazioni, valida nel caso in cui  $J_\mu$  è diversa da zero in una zona finita dello spazio si ottiene come segue. Si consideri l'equazione

$$\square f(x) = g(x),$$

indicando brevemente con  $x$  le tre coordinate spaziali e il tempo e con  $g(x)$  una funzione nota. Se riusciamo a determinare una funzione  $G(x, x')$  (funzione di Green) tale che

$$\square G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'),$$

con  $\delta^{(4)}(x - x') \equiv \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\delta(x_0 - x'_0)$  (in cui  $x_0 = ct$ ) si può scrivere una soluzione particolare per  $f$  nella forma

$$f(x) = \int d^4x' G(x - x')g(x')$$

con  $d^4x' \equiv dx' dy' dz' dx'_0$ . Consideriamo gli integrali di Fourier

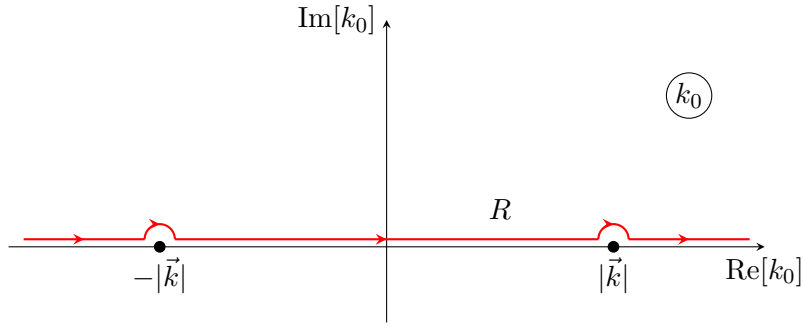
$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G_0(k) e^{-ik_\mu(x-x')^\mu}, \quad (30)$$

$$\delta^{(4)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik_\mu(x-x')^\mu}. \quad (31)$$

Si ha:

$$G_0(k) = -\frac{1}{k_\mu k^\mu} = \frac{1}{\vec{k}^2 - k_0^2}.$$

Se desideriamo una soluzione "ritardata" di  $G(x - x')$ , cioè tale che  $G = 0$  per  $t < t'$  ed onde uscenti per  $t > t'$ , dobbiamo prendere un cammino complesso  $R$  nel piano complesso  $k_0$  come indicato in figura 3. La soluzione ritardata quindi è



**Figura 3:** Cammino di integrazione.

$$G_R(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_R d^4k \frac{e^{-ik_\mu(x-x')^\mu}}{k_\mu k^\mu}$$

si ha per successive integrazioni (usando il teorema dei residui)

$$\begin{aligned} G_R(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \frac{\sin[|\vec{k}|c(t-t')]}{|\vec{k}|} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty dk \sin(kc\Delta t) \sin(kR) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 R} \int_{-\infty}^\infty dk \sin(kc\Delta t) \sin(kR) \\ &= \frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^\infty dk \left[ e^{ik(R-c\Delta t)} - e^{ik(R+c\Delta t)} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi R} \delta(R - c\Delta t) , \end{aligned} \quad (32)$$

avendo posto

$$k \equiv |\vec{k}|, \quad \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}', \quad \text{e} \quad \Delta t \equiv t - t' .$$

Quindi la soluzione “ritardata” per  $f(x)$  è:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4\pi} \int d^4x' \frac{g(x')}{R} \delta(R - c\Delta t) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\vec{r}' \frac{[g(\vec{r}', t')]_{t'=t-R/c}}{R} . \end{aligned}$$

## 6 Potenziali di Liénard -Wiechert

Supponiamo che la sorgente dei campi sia costituita da una carica puntiforme,  $+e$ , in moto vario. Sia  $\vec{r}_e(t)$  la sua posizione al tempo  $t$  e  $\vec{v} = d\vec{r}_e/dt$  la sua velocità. Il quadrivettore  $J_\lambda(\vec{r}', t')$  è dato da

$$J^\mu(\vec{r}', t') = ec\beta^\mu \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_e(t)) , \quad \beta^\mu \equiv (1, \vec{\beta}) ,$$

essendo  $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ . Notare che  $\beta^\mu$  non è un quadrivettore, bensì  $\beta^\mu \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_e(t))$ . Sostituendo questa espressione di  $J^\mu$  nella formula dei potenziali ritardati scritta come integrale quadruplo,

si ha

$$\begin{aligned} A^\mu &= \frac{1}{c} \int d^4x' \frac{J^\mu(x')}{R} \delta(R - ct + ct') \\ &= e \int dt' \frac{\beta^\mu(t')}{R(t')} \delta\left(t' + \frac{1}{c}R(t') - t\right) \\ &= \frac{e\beta'^\mu}{R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}'} \end{aligned}$$

dove, d'ora in poi,  $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_e(t')$  e l'apice alle varie grandezze indica che vanno prese al tempo ritardato  $t'$  definito da  $t' = t - \frac{1}{c}R(t')$ . Nell'uguaglianza precedente si è fatto uso inoltre di

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left( t' + \frac{1}{c}R(t') - t \right) = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R'}{\partial t'} = 1 - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{\beta}'}{R'}$$

Separando le componenti spaziali e temporali di  $A^\mu$  si ha

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e\vec{\beta}'}{R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}'}, \quad \varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}'}, \quad (33)$$

questi sono i potenziali di Liénard e Wiechert.

Da questi potenziali si possono ottenere i campi mediante le usuali equazioni

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A},$$

dove compaiono derivate rispetto al tempo  $t$  attuale e rispetto alle coordinate del punto potenziato  $\vec{r}$ . I potenziali di Liénard e Wiechert, (33), sono espressi però in termini di  $\vec{r}$  e di  $t'$  ed il tempo ritardato  $t'$  risulta essere funzione di  $\vec{r}$  e  $t$  tramite la relazione implicita  $t' = t - \frac{1}{c}R(t')$ . Perciò bisogna calcolare derivate di  $t'$  rispetto a  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ . Prima abbiamo, derivando rispetto a  $t$  l'equazione  $t' = t - \frac{1}{c}R(t')$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\vec{R}' \cdot \vec{\beta}'}{R'} \frac{\partial t'}{\partial t},$$

da cui segue

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R'}{R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}'} \quad (34)$$

Per trovare le derivate di  $t'$  rispetto a  $x$ ,  $y$ ,  $z$  notiamo che

$$\text{grad} t' = \text{grad} \left( t - \frac{1}{c}R(t') \right) = -\frac{1}{c} \text{grad} R(t') = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial R'}{\partial t'} \text{grad} t' + \frac{\vec{R}'}{R'} \right)$$

da cui segue

$$\text{grad} t' = -\frac{1}{c} \frac{\vec{R}'}{R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}'}$$

Usando queste formule si trova per i campi

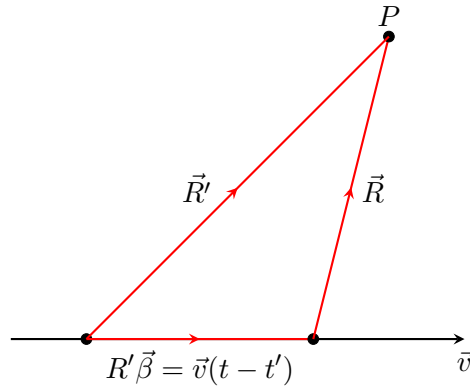
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \frac{(1 - \beta'^2)(\vec{R}' - R'\vec{\beta}')}{(R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}')^3} + \frac{e}{c} \frac{\vec{R}' \times [(\vec{R}' - R'\vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}']}{(R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}')^3}, \quad (35)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{R'} \vec{R}' \times \vec{E}. \quad (36)$$

Il campo magnetico è sempre perpendicolare a  $\vec{E}$ . Il campo elettrico è composto da un primo termine che non contiene l'accelerazione e che per grandi distanze va come  $1/R^2$  e un secondo termine che contiene  $\dot{\vec{\beta}}$  e che va come  $1/R$  per grandi  $R$ . Quest'ultimo termine è relativo alle onde elettromagnetiche irradiate dalla particella.

## 7 Campi creati da una carica in moto uniforme

Supponiamo ora che  $\vec{v} = \text{cost.}$ . Cerchiamo di esprimere tutto in termini di funzioni del tempo attuale  $t$ . Dalla figura 7 abbiamo che



**Figura 4:** Punto potenziato e raggi vettori attuali e ritardati.

$$\vec{R}' = \vec{R} + R' \vec{\beta} \quad (37)$$

e risolvendo l'equazione di secondo grado che si ottiene per  $R'$  quadrando la (39),

$$R' = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R} + \sqrt{(\vec{\beta} \cdot \vec{R})^2 + (1 - \beta^2) R^2}}{1 - \beta^2},$$

dove la radice è stata scelta con il segno positivo poichè  $R' > 0$  e  $\beta < 1$ . Abbiamo anche

$$R' - \vec{R}' \cdot \vec{\beta}' = (1 - \beta^2) R' - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = \sqrt{(\vec{\beta} \cdot \vec{R})^2 + (1 - \beta^2) R^2} \equiv s$$

Allora i campi si scrivono

$$\vec{E} = e \frac{(1 - \beta^2) \vec{R}}{s^3}, \quad \vec{B} = \vec{\beta} \times \vec{E},$$

che si possono naturalmente ottenere in modo più immediato operando con una trasformazione di Lorentz sul campo Coulombiano esistente nel sistema in cui la carica è in quiete. Analogamente per i potenziali si ottiene

$$\vec{A} = \frac{e \vec{\beta}}{s} = \varphi \vec{\beta}, \quad \varphi = \frac{e}{s}.$$

Indicando con  $\theta$  l'angolo che  $\vec{R}$  forma con  $\vec{\beta}$ , possiamo scrivere il modulo di  $\vec{E}$  come

$$\vec{E} = \frac{e}{R^2} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

L'intensità del campo, rispetto al valore statico, risulta rimpicciolita di un fattore  $1/\gamma^2$  lungo la direzione del moto ( $\theta = 0$ ), mentre perpendicolarmente ad esso ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) viene moltiplicata per un fattore  $\gamma$ . Si conseguenza, via via che la velocità della carica si avvicina alla velocità della luce, l'intero suo campo tende a concentrarsi su di un disco piatto perpendicolare alla traiettoria. Considerando ora la forza di Lorentz

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E} + \vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{E}) = (1 - \beta^2) \vec{E} + (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta} = -\text{grad} [(1 - \beta^2)\varphi] ,$$

essendo  $\varphi$  il potenziale scalare.  $\psi \equiv (1 - \beta^2)\varphi$  è detto talvolta potenziale di convenzione. Esso ha valori costanti sull' ellissoide di rotazione

$$x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2) = \text{cost.} ,$$

avendo scelto l'origine con la posizione istantanea della carica e  $\vec{\beta}$  lungo l'asse  $x$ . Questo ellissoide si ottiene contraendo una sfera in direzione  $x$  per un fattore  $1/\gamma$ . Ricordare il caso di una sfera conduttrice carica e l'assurdo che si avrebbe se anche la sfera subisse la contrazione di Lorentz.

## 8 Effetto Čerenkov

Nel caso di una carica in moto uniforme nel vuoto, nel risolvere l' equazione di secondo grado, allo scopo di esprimere  $R'$  in termini delle grandezze calcolate al tempo attuale  $t$ , si è potuto escludere una delle soluzioni poiché,  $R' > 0$  e  $\beta < 1$ . Quando la carica si muove in un mezzo caratterizzato da un indice di rifrazione  $n$ , tutte due le soluzioni sono accettabili, quando sia verificata la condizione

$$\beta_m = \frac{nv}{c} > 1 , \quad (38)$$

dove  $\beta_m$  nella materia prende il posto di  $\beta$ . La condizione (38) dice che la velocità della particella deve essere maggiore della velocità della luce nel mezzo. In questo caso si ha

$$R' = \frac{-\vec{\beta}_m \cdot \vec{R} \pm \sqrt{(\vec{\beta}_m \cdot \vec{R})^2 - (\beta_m^2 - 1) R^2}}{\beta_m^2 - 1} = c(t - t') ,$$

ovvero esistono due posizioni "ritardate" della carica che contribuiscono a creare i campi al tempo attuale  $t$  come rappresentato in figura 5. Il caso in cui la velocità della carica è minore della velocità della luce nel mezzo è rappresentato dalla figura 6. Possiamo calcolare ora l' apertura del cono involuppo delle onde sferiche partendo dai diversi punti occupati successivamente dalla carica. I potenziali saranno diversi da zero dentro questo cono. Indicando con  $\theta$  l'angolo tra  $\vec{R}$  e  $\vec{\beta}$ , e poiché  $R' > 0$ , dovremo avere (tenuto conto anche della realtà di  $R'$ ) le due condizioni seguenti.

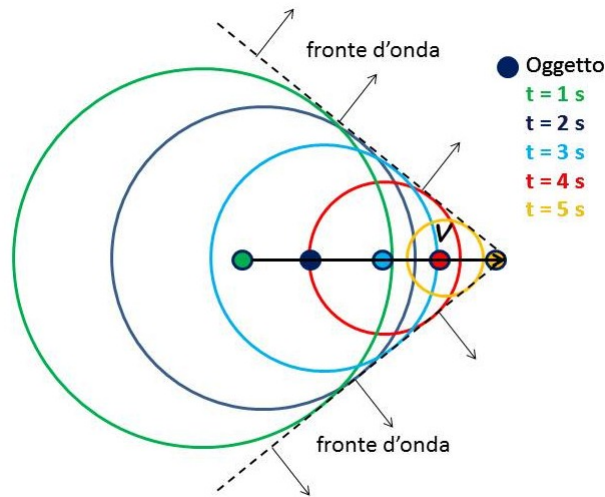
$$(\vec{\beta}_m \cdot \vec{R})^2 - (\beta_m^2 - 1) R^2 \geq 0 , \quad -\vec{\beta}_m \cdot \vec{R} \geq 0$$

da cui seguono

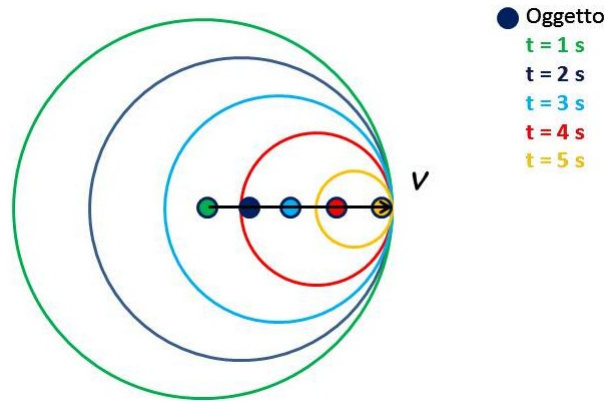
$$\cos^2 \theta \geq 1 - \frac{1}{\beta_m^2} , \quad \cos \theta \leq 0 ,$$

ovvero

$$-1 \leq \cos \theta \leq -\sqrt{1 - \frac{1}{\beta_m^2}} .$$



**Figura 5:** Velocità della particella superiore alla velocità della luce nel mezzo.



**Figura 6:** Velocità della particella minore della velocità della luce nel mezzo.

Quindi l'apertura del cono, entro cui sono diversi da zero i potenziali è  $\pi - \bar{\theta}$  dove  $\cos \bar{\theta} = -\sqrt{1 - \frac{1}{\beta_m^2}}$ . Da ciò segue che il cono di emissione della radiazione Čerenkov (cono perpendicolare a quello precedentemente descritto) ha un' apertura  $\theta_c$  uguale a

$$\cos \theta_c = \cos \left( \bar{\theta} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \bar{\theta} = \frac{1}{\beta_m} = \frac{c}{nv} .$$

I campi sono quasi esclusivamente concentrati sulla superficie del cono di apertura  $\bar{\theta}$ , e quindi anche l' energia. Ciò costituisce un' onda d' urto l' effetto fu scoperto sperimentalmente da Čerenkov nel 1937 e interpretato teoricamente da Frank e Tamm nello stesso anno (si veda la sezione 10).

$$\vec{R}' = \vec{R} + R' \vec{\beta} \tag{39}$$

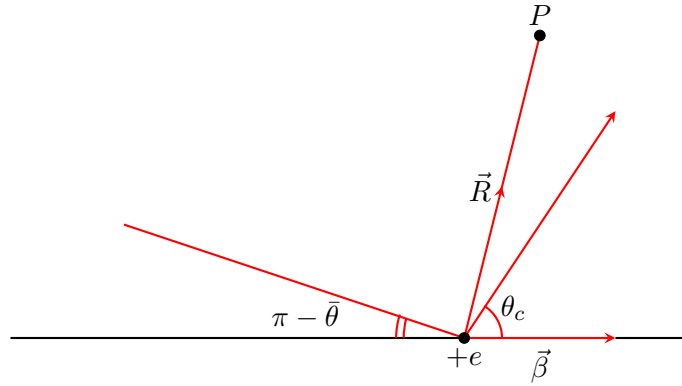


Figura 7: Angoli effetto Cerenkov.

## 9 Potenza irradiata da una carica puntiforme

In approssimazione non relativistica ( $\vec{\beta} \simeq 0$ ) la parte radiativa di  $\vec{E}$  è data da

$$\vec{E} \simeq \frac{e}{c} \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R}, \quad \hat{n} = \frac{\vec{R}}{R},$$

nella stessa approssimazione si è posto  $t' = t$  poiché dalla (34)

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \left[ 1 - \frac{\vec{R}' \cdot \vec{\beta}'}{R'} \right]^{-1} \simeq 1.$$

Il vettore di Poynting è dato da

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} E^2 \hat{n},$$

quindi la potenza irradiata per unità di angolo solido è

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \left| \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \right|^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \left[ \dot{\vec{\beta}}^2 - (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta,$$

essendo  $\Theta$  l'angolo tra i vettori  $\hat{n}$  e  $\dot{\vec{\beta}}$ . Integrando su tutto l'angolo solido (con la scelta della direzione di  $\dot{\vec{\beta}}$  come asse polare) si ha la potenza totale irradiata

$$W = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3}, \quad \text{formula di Larmor}.$$

Un calcolo relativistico esatto avrebbe dato per la potenza totale irradiata l'espressione di Liénard

$$W = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \left[ (\dot{\vec{\beta}})^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right], \quad (40)$$

la quale si ottiene integrando sulle direzioni di  $\hat{n}$  l'espressione relativistica di  $dW/d\Omega$  data da

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\left| \hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} \quad (41)$$

Il fattore  $\partial t/\partial t' = 1 - \hat{n}' \cdot \vec{\beta}'$  è necessario per riferire la potenza al tempo  $t'$  della carica; nell'ultima espressione è stato ommesso, per semplicità, l'apice.

Vediamo esplicitamente come si ottiene la (40) dalla (41). Omettendo gli apici, il prodotto vettore in (41) si espande secondo la

$$\left| \hat{n} \times \left[ (\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right|^2 = (\dot{\beta})^2(1 + \beta^2) - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - 2\hat{n} \cdot \vec{\beta}(\dot{\beta})^2 + 2\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} - (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - (\hat{n} \cdot \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2$$

Prendendo l'asse  $z$  nella direzione di  $\vec{\beta}$ , le integrazioni sull' angolo  $\varphi$  sono semplici e gli integrali necessari per trovare la potenza totale irradiata sono del tipo ( $x = \cos \theta$ )

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \frac{1}{(1 - \beta x)^5} &= \frac{2(1 + \beta^2)}{(1 - \beta^2)^4}, \\ \int_{-1}^1 dx \frac{x}{(1 - \beta x)^5} &= \frac{2\beta(5 + \beta^2)}{3(1 - \beta^2)^4}, \\ \int_{-1}^1 dx \frac{x^2}{(1 - \beta x)^5} &= \frac{2\beta(1 + 5\beta^2)}{3(1 - \beta^2)^4}, \end{aligned}$$

e danno i risultati

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi c} \int d\Omega \frac{(\dot{\beta})^2(1 + \beta^2) - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} &= \frac{e^2}{c(1 - \beta^2)^4} \left[ (\dot{\beta})^2(1 + \beta^2) - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] (1 + \beta^2), \\ \frac{e^2}{4\pi c} \int d\Omega \frac{-2\hat{n} \cdot \vec{\beta}(\dot{\beta})^2 + 2\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} &= \frac{e^2}{c(1 - \beta^2)^4} \left[ -\frac{2}{3}(\dot{\beta})^2\beta^2(5 + \beta^2) + \frac{2}{3}(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2(5 + \beta^2) \right], \\ \frac{e^2}{4\pi c} \int d\Omega \frac{-(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} &= \frac{e^2}{c(1 - \beta^2)^4} \left[ -2(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - \frac{1}{3}\dot{\beta}^2(1 - \beta^2) \right], \\ \frac{e^2}{4\pi c} \int d\Omega \frac{-(\hat{n} \cdot \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} &= \frac{e^2}{c(1 - \beta^2)^4} \left[ -\frac{1}{3}(1 - \beta^2)[\beta^2(\dot{\beta})^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2] \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Sommando le (42) si ottiene

$$\begin{aligned} W &= \frac{e^2}{3c(1 - \beta^2)^4} \left[ \dot{\beta}^2(1 - \beta^2)^2 + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2(1 - \beta^2) \right] \\ &= \frac{e^2}{3c(1 - \beta^2)^3} \left[ \dot{\beta}^2(1 - \beta^2) + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \\ &= \frac{e^2}{3c(1 - \beta^2)^3} \left[ \dot{\beta}^2 - |(\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})|^2 \right], \end{aligned} \quad (43)$$

cioè appunto la (40).

## 10 Spettro in frequenza dell' energia irradiata

Calcoliamo ora lo spettro di frequenza della energia irradiata in tutto il tempo in cui la carica è accelerata, supponendo che l' accelerazione duri per un tempo finito o che vada a zero nel passato e nel futuro in modo che l' energia irradiata sia finita. Riferendoci ora al tempo dell' osservatore in modo che si abbia lo spettro di frequenze visto da lui, abbiamo, per la potenza irradiata

$$\frac{dW}{d\Omega} = |\vec{g}(t)|^2, \quad \text{dove} \quad \vec{g}(t) = \sqrt{\frac{c}{4\pi}} R' \vec{E}$$

ed inoltre

$$R' \vec{E} = \frac{e \hat{n}' \times \left[ (\hat{n}' - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}' \right]}{c (1 - \hat{n}' \cdot \vec{\beta}')^3}.$$



Per l' energia totale irradiata abbiamo

$$\frac{dE}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{g}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{g}_0(\omega)|^2 d\omega \equiv \int_0^{+\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega$$

dove  $\vec{g}_0(\omega)$  è la trasformata di Fourier di  $\vec{g}(t)$

$$\vec{g}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{g}(t) e^{i\omega t} dt ,$$

ed è stato fatto uso del teorema di Parseval. Inoltre, l'ultima uguaglianza definisce  $\frac{dI(\omega)}{d\Omega}$  (solo ovviamente per frequenze positive) e si ha (usando  $\vec{g}_0(-\omega) = \vec{g}_0^*(\omega)$ ):

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = |\vec{g}_0(\omega)|^2 + |\vec{g}_0(-\omega)|^2 = 2|\vec{g}_0(\omega)|^2 .$$

$\frac{dI(\omega)}{d\Omega}$  è lo spettro di frequenza cercato. Calcoliamo  $\vec{g}_0(\omega)$

$$\begin{aligned} \vec{g}_0(\omega) &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\hat{n}' \times [(\hat{n}' - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}']}{(1 - \hat{n}' \cdot \vec{\beta}')^3} \\ &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega(t' + \frac{R'}{c})} \frac{\hat{n}' \times [(\hat{n}' - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}']}{(1 - \hat{n}' \cdot \vec{\beta}')^2} \\ &\simeq \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} e^{\frac{i}{c}\omega r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_e}{c})} \frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2} . \end{aligned}$$

dove si è fatto un cambiamento di variabili da  $t$  a  $t' = t - \frac{R'}{c}$ , ricordando che  $\partial t / \partial t' = 1 - \hat{n}' \cdot \vec{\beta}'$ , e si è approssimato  $R'$  con  $r - \hat{n} \cdot \vec{r}_e$  considerando inoltre  $\hat{n}$  quasi uguale al versore di  $\vec{r}$  e indipendente dal tempo.

$$\begin{aligned} \vec{g}_0(\omega) &= \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} e^{\frac{i}{c}\omega r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_e}{c})} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \right] . \\ &= -\sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} i\omega e^{\frac{i}{c}\omega r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_e}{c})} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) . \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_e}{c})} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) \right|^2 .$$

Questa formula può essere usata nel caso dell' effetto Čerenkov (sostituendo  $c/n$  a  $c$  e  $e/n$  ad  $e$ ), cioè

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2 n}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega(t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}_e}{c})} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{v}) \right|^2 .$$

Poiché il moto è uniforme si ha  $\vec{r}_e = \vec{v}t$  e, indicando con  $\theta$  l'angolo tra  $\hat{n}$  e  $\vec{v}$ , abbiamo

$$\frac{e^2 n}{c} \beta^2 \sin^2 \theta \left| \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t(1 - n\beta \cos \theta)} \right|^2 = \frac{e^2 n}{c} \beta^2 \sin^2 \theta |\delta(1 - \beta_m \cos \theta)|^2 .$$

Questa energia è infinita perché la carica irradia per un tempo infinito. Se il tempo fosse stato  $2T$  allora:

$$\begin{aligned} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} &= \frac{e^2 n}{c} \beta^2 \sin^2 \theta \left| \frac{\omega}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t(1-n\beta-m\cos\theta)} \right|^2 \\ &= \frac{e^2 n}{c} \beta^2 \sin^2 \theta \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2} \frac{\sin^2 [\omega T(1-\beta_m \cos \theta)]}{[\omega T(1-\beta_m \cos \theta)]^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

La funzione  $\sin^2[\dots]/[\dots]^2$  ha un massimo molto stretto per  $\omega T \gg 1$  intorno all' angolo  $\theta_c$ . Integrando ora sull' angolo solido e ponendo  $\sin^2 \theta \simeq \sin^2 \theta_c$  si ha

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{ue^2 \beta^2 \sin^2 \theta_c}{c} \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2} 2\pi \int_{-1}^{+1} dx \frac{\sin^2 [\omega T(1-\beta_m x)]}{[\omega T(1-\beta_m x)]^2} \\ &= \frac{ue^2 \beta^2 \sin^2 \theta_c}{c} \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2} 2\pi \frac{1}{\omega T \beta_m} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\sin^2 y}{y^2} \\ &= \frac{ue^2 \beta^2 \sin^2 \theta_c}{c} \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2} \frac{2\pi}{\omega T \beta_m} \pi = (2c\beta T) \frac{e^2 \omega}{c^2} \sin^2 \theta_c, \end{aligned} \quad (45)$$

e si vede che  $I(\omega)$  è proporzionale a  $T$ . Si può ottenere l' energia irradiata per intervalli unitari di frequenza e per unità di percorso dividendo la precedente formula per il percorso  $L = 2c\beta T$

$$\frac{dI(\omega)}{dx} = \frac{e^2 \omega}{c^2} \sin^2 \theta_c = \frac{e^2 \omega}{c^2} \left[ 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right],$$

dove  $\omega$  è tale che  $n(\omega) > 1/\beta$ . Il numero di quanti con frequenza compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  emessi per unità di percorso da una particella di carica  $e$  è dunque

$$d\omega \frac{e^2}{\hbar c^2} \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 n^2} \right) = \frac{1}{137} \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 n^2} \right) \frac{d\omega}{c}$$

e dipende da  $\omega$  solo attraverso  $n(\omega)$ . Per un elettrone molto rapido ( $v \simeq c$ ) che passi attraverso l' acqua ( $n \simeq 1.33$ ) vi sono circa 230 quanti emessi per centimetro di percorso nella regione visibile ( $4000\text{\AA} \leq \lambda \leq 7500\text{\AA}$ ).