Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prof. Gianluca Grignani

1° Compito di Esonero

18 Aprile 2013

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione al 2° esonero è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Una particella libera di massa m in moto unidimensionale è descritta, all' istante $t = 0$, dalla seguente funzione d' onda normalizzata

$$\psi(x,0) = \frac{N}{x^2 + a^2} \; , \qquad \left(N = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}} \right) \; ,$$

con a costante positiva. Senza ricavare $\psi(x,t)$, ma applicando teoremi generali, si calcoli esplicitamente lo scarto quadratico medio di x all' istante generico $t > 0$, $(\Delta x)^2_t$, in termini di t, m, a e $\hbar$.
(Integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \; , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{\pi}{a^{2n-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} \; , \quad n \geq 2 \; .)$$

2. Una particella di massa m, in moto unidimensionale ed in uno stato di energia E, è soggetta al seguente potenziale (doppia barriera rettangolare)

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0, \; x > 2L) \; ; \\ V_1, & (0 < x < L) \; ; \\ V_2, & (L < x < 2L) \; ; \end{cases}$$

con $E > V_1 > V_2 > 0$.
Nell' ipotesi di particella incidente da sinistra e di validità delle condizioni seguenti: $k_1 = \dfrac{k_2}{2} = \dfrac{\pi}{L}$ ($k_{1,2} = \sqrt{2m(E - V_{1,2})/\hbar^2}$), scrivere la forma della corrispondente autofunzione su tutto l'asse x. Dalle condizioni di raccordo nei punti $x = 0$, $x = L$ e $x = 2L$ si verifichi, poi, la continuità della densità di corrente di probabilità e si calcoli il coefficiente di trasmissione della doppia barriera, giustificando fisicamente il risultato ottenuto.

3. Scrivere l' equazione agli autovalori per l' hamiltoniana di una particella di massa m, in moto unidimensionale, sottoposta all' azione del potenziale seguente

$$V(x) = \begin{cases} +\infty \; , & (x \leq 0) \; ; \\ \dfrac{\hbar^2}{mx^2} \; , & x > 0 \; . \end{cases}$$

Per $x > 0$ si prendano autofunzioni della forma

$$u_k(x) = \left(a_1 + \frac{a_2}{\xi} \right) \sin \xi + \left(b_1 + \frac{b_2}{\xi} \right) \cos \xi \; , \qquad (\xi = kx, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}})$$

e si determinino le costanti a_1, a_2, b_1 e b_2 dall' equazione agli autovalori scritta, dalle condizioni al contorno e dalla ortonormalità delle autofunzioni ad una $\delta(k - k')$.