Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

1° Compito di Esonero

8 Aprile 2016

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione al 2° esonero è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Risolvere l'equazione agli autovalori per il seguente operatore hermitiano

$$a\hat{p} + b\hat{x}$$

con a e b costanti reali e verificare che gli autovalori e le autofunzioni soddisfano le note proprietà: autovalori reali, autofunzioni ortonormali (trovare la costante di normalizzazione) e complete.

2. Lo stato di una particella di massa m, in moto unidimensionale e non soggetta a forze, è descritto al generico istante $t > 0$ da una funzione d' onda della seguente forma

$$\psi(x,t) = \alpha(t)e^{-\beta(t)x^2} \qquad ,$$

con $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funzioni complesse di t.

a) Determinare la forma delle funzioni $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ risolvendo le equazioni differenziali a cui devono soddisfare (assumere la costante di integrazione per $\beta(t)$ reale, positiva e collegare ad essa quella per $\alpha(t)$ facendo uso della condizione di normalizzazione).

b) Dire che tipo di pacchetto d' onda descrive la ψ, così determinata, all' istante $t = 0$, e qual è il significato fisico di $(4\beta(0))^{-1}$ e di $\beta(0)/(2|\beta(t)|)^2$.

3. Una particella di massa m, in moto unidimensionale, è soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} -bx & (x < 0,\ \text{zona I}) \ , \\ bx & (x \geq 0,\ \text{zona II}) \ , \end{cases} \qquad (b > 0) \ .$$

Determinare lo spettro degli autovalori dell' energia usando le regole di Wilson-Sommerfeld e confrontarlo con quello ottenuto risolvendo l' equazione agli autovalori per l' hamiltoniana.
(Usare per gli zeri della funzione di Airy $Ai(z)$, e della sua derivata $Ai'(z)$ (tutti sul semiasse negativo) l' espressione approssimata

$$z_n \simeq -\left[\frac{3\pi}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^{2/3} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

che dà, alternativamente, gli zeri di $Ai'(z)$ (per n pari) e quelli di $Ai(z)$ (per n dispari) con un errore del 9% per z_0 e inferiore al 1% per tutti gli altri, errore che diminuisce rapidamente al crescere di n).