

Corso di
MECCANICA QUANTISTICA

1° Compito di Esonero

28 Aprile 2017

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione al 2° esonero è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Lo stato di una particella, in moto unidimensionale, è descritto dalla seguente funzione d'onda (normalizzata) nello spazio degli impulsi:

$$\varphi(p) = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}} e^{-\beta^2 p^2/2 - i\gamma p} \quad ,$$

con β e γ costanti reali ($\beta > 0$).

- a) Facendo uso solamente di $\varphi(p)$ (senza cioè derivare la funzione d'onda nello spazio delle configurazioni, $\psi(x)$) si calcolino esplicitamente i valori medi di x e di x^2 in termini di \hbar , β e γ .
- b) Mostrare che i risultati ottenuti al punto a) potevano essere ricavati senza eseguire alcun integrale, ma solo ricordando teoremi noti.

(Integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy y^{2a} e^{-r^2 y^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2a+1)}{2^a (2a+1) r^{2a+1}} \sqrt{\pi} \quad (r > 0 ; a = 0, 1, 2, \dots).$$

2. Una particella di massa m , in moto unidimensionale, è soggetta al seguente potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 , \\ -V_0 & 0 \leq x \leq L , (V_0 > 0) , \\ 0 & x > L , \end{cases}$$

buca rettangolare di potenziale. Si Supponga inoltre che i parametri della buca, V_0 e L , soddisfino alla seguente relazione: $kL = \pi/2$ (con $k = \sqrt{2mV_0/3\hbar^2}$).

Se la particella incide sulla buca da sinistra, con energia $E = V_0/3$, determinare la corrispondente autofunzione e la probabilità relativa che la particella si trovi dentro la buca (cioè nell'intervallo $0 \leq x \leq L$) e, fuori dalla buca, nell'intervallo $-L \leq x \leq 0$.

3. Una particella sottoposta ad un potenziale di oscillatore armonico unidimensionale, $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, si trova all'istante $t = 0$ in uno stato specificato dalla funzione d'onda $\psi(x)$. Determinare la relazione funzionale tra $\psi(x)$ e la funzione d'onda ai due istanti successivi $t_1 = \pi/\omega$ e $t_2 = 2\pi/\omega$.