

## 1° Compito di Esonero

16 marzo 2018

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione al 2° esonero è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Sia  $\hat{A}$  un operatore lineare che agisce su una generica funzione d'onda  $\psi(x, y, z)$  nel seguente modo:

$$\hat{A}\psi(x, y, z) = \psi(x - \epsilon y, y + \epsilon x, z) .$$

dove  $\epsilon$  è un parametro reale infinitesimo. Posto

$$\hat{A} = I + \frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{B} \quad (1)$$

- determinare l'operatore  $\hat{B}$  e mostrare che è hermitiano.
  - Trovare l'operatore  $\hat{U}$  della trasformazione finita che si ottiene come prodotto di infinite trasformazioni infinitesime (1) e mostrare che  $\hat{U}$  è unitario.
  - Scrivere esplicitamente come trasformano gli operatori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  sotto la trasformazione unitaria  $\hat{U}$ .
2. Una particella di massa  $m$  si trova nello stato fondamentale di una buca infinita unidimensionale di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq \frac{L}{2} , \\ +\infty & |x| > \frac{L}{2} , \end{cases} .$$

Calcolare l'ampiezza di probabilità,  $\varphi(p)$ , relativa all'impulso, normalizzarla all'unità e usarla per determinare il valor medio di  $p$  e di  $p^2$ .

(Integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{(t^2 - \pi^2/4)^2} dt = \frac{2}{\pi} , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 \cos^2 t}{(t^2 - \pi^2/4)^2} dt = \frac{\pi}{2} )$$

3. Al tempo  $t = 0$  una particella soggetta ad un potenziale di oscillatore armonico è descritta dalla funzione d'onda:

$$\psi(x, 0) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{2^n n!}} u_n(x)$$

dove le  $u_n(x)$  sono le autofunzioni normalizzate dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico,  $A$  una costante di normalizzazione e  $a$  una costante adimensionata positiva.

- Trovare la costante di normalizzazione  $A$ .
- Usando la funzione generatrice dei polinomi di Hermite

$$F(\xi, z) = e^{-z^2 + 2\xi z}$$

trovare la funzione d'onda all'istante  $t > 0$ ,  $\psi(x, t)$ .

- Mostrare che  $|\psi(x, t)|^2$  è una funzione periodica del tempo e indicarne il periodo.
- Calcolare il valor medio dell'energia.