

1° Compito di Esonero

28 febbraio 2019

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione al 2° esonero è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Una particella di massa m , in moto unidimensionale, è soggetta al potenziale

$$V(x) = bx^4 \quad ,$$

con b costante positiva. Usare le regole di Wilson-Sommerfeld per determinare lo spettro degli autovalori dell'energia. Dare inoltre, per ogni energia, il periodo del moto classico. (Si faccia uso del seguente integrale

$$\int_0^1 dy \sqrt{1-y^4} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2 \quad ,$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma di Eulero e $\Gamma(1/4) = 3.625609908\dots$).

2. Una particella di massa m , in moto unidimensionale e proveniente da sinistra, incontra la seguente barriera di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ , regione I} \\ V_0 & 0 \leq x \leq L \text{ , regione II} \\ 0 & L < x \text{ , regione III} \end{cases} \quad .$$

Nella regione II, la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$u_E(x) = C \left(\cos k_1 x + i \frac{k}{k_1} \sin k_1 x \right)$$

dove $k_1 = 2\pi/L$, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ e C è una costante.

- Calcolare per quale valore di E la $u_E(x)$ è autostato dell'hamiltoniana nella regione II.
 - Trovare le autofunzioni dell'hamiltoniana nelle regioni I e III, corrispondenti all'autovalore E trovato in a).
 - Mostrare che la densità di corrente di probabilità è conservata nelle tre regioni e calcolare i coefficienti di riflessione e di trasmissione della barriera.
3. Una particella di massa m legata elasticamente (oscillatore armonico unidimensionale con costante elastica $k = m\omega^2$) si trova, all'istante $t = 0$, nello stato $\psi(x, 0)$.

- Determinare i valori di aspettazione di x , p , x^2 e p^2 all'istante generico $t > 0$ in termini dei corrispondenti valori all'istante $t = 0$.
- Nel caso in cui

$$\psi(x, 0) = A e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x-a)^2 + ip_0x/\hbar} \quad , \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

dove A è una costante di normalizzazione, calcolare esplicitamente le deviazioni standard all'istante generico $t > 0$. Il loro prodotto è consistente con il principio di indeterminazione?