Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

Meccanica Quantistica

Prof. Gianluca Grignani

2° Compito di Esonero

5 Giugno, 2013

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione al 2° esonero è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Due particelle identiche di spin 1/2, non interagenti, sono entrambe soggette ad un potenziale di oscillatore armonico isotropo. Sapendo che sono in uno stato di tripletto per lo spin, scrivere la parte orbitale della funzione d' onda del sistema corrispondente al valore più basso dell' energia e ad un valore nullo per L_z ($\vec{L}$= momento angolare orbitale totale). In questo stato calcolare, poi, la probabilità di trovarle entrambe nel semispazio $z \geq 0$; fare il confronto con l' analoga probabilità che si avrebbe se le particelle fossero distinguibili e dare un' interpretazione fisica dei differenti risultati ottenuti.

2. Valutare l'autovalore dell' energia per lo stato fondamentale dell' atomo di idrogeno usando il metodo variazionale e la seguente funzione d' onda di prova normalizzata

$$\psi(\vec{r}) = N e^{-\alpha^2 r^2/2} \ , \qquad \left(N = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{3/2} \right) \ ,$$

con $\alpha > 0$ parametro da variare. Confrontare il risultato ottenuto con quello esatto.

3. L'Hamiltoniana di una particella di massa m e spin 1/2 è data da

$$H = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + A \hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} \ ,$$

con A costante positiva e $\hat{\sigma}_i$, $i = 1, 2, 3$ matrici di Pauli. Assumendo le autofunzioni di H della forma

$$\psi(\vec{r}) = u(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \ , \qquad \left(u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} a(\vec{p}) \\ b(\vec{p}) \end{pmatrix} \right) \ ,$$

trovare gli autovalori di H e la corrispondente forma degli autospinori $u(\vec{p})$.
(Integrali utili:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \quad (\alpha > 0) \ ; \qquad \int_0^\infty x^{2n} \, e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} \alpha^{2n+1}} \sqrt{\pi} \quad (\alpha > 0, \ n = 1, 2, \dots) \ ;$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \, e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{n!}{2\alpha^{2n+2}} \quad (\alpha > 0, \ n = 1, 2, \dots) \ .)$$