Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

2° Compito di Esonero

5 giugno 2015

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. La parte angolare della funzione d'onda di una particella è data da

$$\psi(\theta,\varphi) = A\, e^{2i\varphi}$$

indipendente da θ, dove θ e φ sono i consueti angoli delle coordinate sferiche ed A è una costante che assicura la normalizzazione ad 1 della ψ per integrazione sull'angolo solido.

a) Determinare A.

b) Dire quali sono i possibili risultati di una misura di L^2 e di L_z ($\vec{L}$ = momento angolare orbitale).

c) Calcolare esplicitamente la probabilità di ottenere il risultato $6\hbar^2$ per L^2 e $2\hbar$ per L_z.

2. Sia $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ il momento angolare orbitale di un elettrone (si trascuri lo spin). Si considerino gli operatori r, L^2 e L_z (dove $r = |\vec{r}|$).

a) Dire perché questi operatori commutano e trovarne le autofunzioni comuni e i rispettivi autovalori (indicare gli autovalori di r con r').

b) Normalizzando opportunamente le autofunzioni calcolate al punto a), mostrare esplicitamente la loro ortonormalità e completezza.

c) Sviluppare, infine, in termini di queste autofunzioni la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno.

Formule utili:

1. Relazione di completezza delle funzioni sferiche:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta,\varphi)Y_l^{*m}(\theta',\varphi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')\,.$$

2. $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$ in coordinate sferiche:

$$\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')\,.$$

3. Autofunzione dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno:

$$u_{100}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\, e^{-\frac{r}{a_0}} \qquad \left(a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}\right)\,.$$

3. Un elettrone (con il suo spin e il suo momento magnetico intrinseco) è immerso in campi elettromagnetici esterni $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B}(\vec{r},t)$ descritti da un potenziale vettore $\vec{A}(\vec{r},t)$ e scalare $\varphi(\vec{r},t)$, dai quali $\vec{E}$ e $\vec{B}$ seguono in modo consueto:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\,.$$

a) Scrivere l'hamiltoniana dell'elettrone.

b) Mostrare che questa hamiltoniana può essere messa nella seguente forma (hamiltoniana di Pauli):

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\right)^2 + e\varphi\,,$$

dove $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sono le matrici di Pauli ed $e < 0$ è la carica dell'elettrone.

(Si consiglia di usare identità ben note per le σ_i per scrivere l'hamiltoniana di Pauli nella forma più consueta, come richiesto al punto a), lineare nelle σ_i.)