Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

2° Compito di Esonero

6 giugno 2018

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all' orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso.

1. Supponendo che il protone sia una piccola sfera di raggio R carica omogeneamente, calcolare al primo ordine non nullo in $\frac{R}{a_0} \ll 1$, dove a_0 è il raggio di Bohr, come i livelli energetici dell'atomo di idrogeno vengano cambiati da questa ipotesi. Si considerino per esempio i livelli $1s$, $2s$ e $2p$ e si discuta il cambiamento dei livelli per $\ell > 0$.
Le funzioni d'onda radiali dei livelli $1s$, $2s$ e $2p$ sono:

$$\varphi_{1s}(r) = \frac{2e^{-r/a_0}}{a_0^{3/2}} \quad , \qquad \varphi_{2s}(r) = \frac{e^{-r/(2a_0)}(2 - r/a_0)}{2\sqrt{2}a_0^{3/2}} \quad , \qquad \varphi_{2p}(r) = \frac{e^{-r/(2a_0)}r}{2\sqrt{6}a_0^{5/2}} \ .$$

2. L'effetto Stark lineare su autostati dell'energia dell'atomo di idrogeno con $n = 2$, può essere calcolato più realisticamente di quanto fatto a lezione tenendo conto della correzione di struttura fine allo spettro e del Lamb Shift. Si indichino con Δ_F e Δ_L, senza scriverli esplicitamente, gli spostamenti rispetto al livello $2p_{1/2}$ dovuti alla correzione di struttura fine e al Lamb shift, rispettivamente. Definendo $x = \sqrt{3}eEa_0$, calcolare al primo ordine perturbativo non nullo, nella base degli autostati di L^2, J^2 e J_z, $|n = 2, \ell, j, m_j\rangle$, l'effetto Stark nei tre casi:

a) $x \gg \Delta_F \gg \Delta_L$,

b) $x \ll \Delta_L \ll \Delta_F$,

c) $\Delta_L \ll x \ll \Delta_F$,

e discutere per quali valori del campo elettrico E si verificano questi casi.
Si tenga conto che stati con J_z opposti restano degeneri, per la simmetria dell'hamiltoniana di perturbazione nell'inversione dell'angolo azimutale $\varphi \to -\varphi$, e quindi si possono studiare solo le correzioni con m_j positivo.

3. Una particella di spin 1/2 e massa m è descritta dall'hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \ , \qquad V(x) = \frac{\sigma_z + I_{2\times2}}{4} m\omega^2 x^2 \ , \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad I_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

a) Quali sono le autofunzioni e gli autovalori dell'energia?

b) All'istante $t = 0$ il sistema è descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x, 0) = u_0(x)\frac{\chi_+ - \chi_-}{\sqrt{2}} \ , \tag{1}$$

dove $u_0(x)$ è lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico senza spin e $\chi_\pm$ sono gli autospinori della componente z dello spin, S_z, $S_z\chi_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\chi_\pm$. Dire se (1) è autostato dell' hamiltoniana H e se lo è con quale autovalore. Altrimenti determinare il valor medio dell'energia sullo stato (1).

c) Determinare la funzione d'onda al tempo t. All'istante t si misura S_z con un apparecchio à la Stern-Gerlach situato in $x = 0$. Calcolare la probabilità di trovare il risultato $S_z = -\frac{\hbar}{2}$.