Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

2° Compito di Esonero

11 giugno 2019

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all' orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Un sistema a due livelli di energia E_1 ed E_2 (per esempio stati di spin 1/2 in un campo magnetico statico) con $E_1 < E_2$ è perturbato dal seguente potenziale esterno debole variabile con il tempo:

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\omega t} \\ \gamma e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \quad , \ \gamma \ \text{ reale}$$

a partire dal tempo $t = 0$.

a) Trovare $c_1(t)$ e $c_2(t)$, dove

$$\psi(t) = c_1(t) e^{-iE_1 t/\hbar} \chi_+ + c_2(t) e^{-iE_2 t/\hbar} \chi_-$$

risolvendo l' equazione di Schrödinger dipendente dal tempo in modo esatto e assumendo $c_1(0) = 1$ e $c_2(0) = 0$. Determinare le probabilità che lo spin sia in uno stato "up" o "down" ad un generico istante t.

Il risultato porta alla formula di Rabi.

Suggerimento: porre

$$c_1(t) = e^{i(\omega-\omega_{21})t/2} \tilde{c}_1(t) \ , \quad c_2(t) = e^{-i(\omega-\omega_{21})t/2} \tilde{c}_2(t) \ , \quad \omega_{21} \equiv (E_2 - E_1)/\hbar \ ,$$

e diagonalizzare l' hamiltoniana di pertubazione nella nuova base.

b) Discutere il limite di γ piccolo col metodo perturbativo dipendente dal tempo.

2. Si consideri la seguente Hamiltoniana di un oscillatore armonico bidimensionale

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \tag{1}$$

dove m è la massa e k la costante elastica.

Il primo stato eccitato di H_0 è doppiamente degenere. Si supponga ora che il sistema venga perturbato con una perturbazione H'. L'Hamiltoniana totale è pertanto data da $H = H_0 + H'$. Si considerino le seguenti tre possibili espressioni dell'Hamiltoniana di perturbazione H'

$$a) \ \ H' = \frac{1}{2}k' x^2 \qquad b) \ \ H' = \frac{1}{2}k'(x^2 + y^2) \qquad c) \ \ H' = \frac{1}{2}k'(x^2 - y^2) \tag{2}$$

con k' costante. Determinare quale di queste **non** rimuove la degenerazione del primo stato eccitato di H_0 e motivare la risposta.

3. Una particella di spin $\frac{1}{2}$ è in uno stato la cui parte angolare e di spin è data dallo spinore

$$\Psi_{\ell,j}^{m_j}(\theta,\varphi) \ ,$$

autostato di L^2, J^2 e J_z con autovalori rispettivamente $\ell(\ell+1)\hbar^2$, $j(j+1)\hbar^2$ e $m_j\hbar$.

a) Scrivere questo spinore esplicitamente nel caso in cui si abbia $\ell = 1$, $j = \ell + 1/2 = 3/2$, $m_j = 1/2$.

b) Dire inoltre qual è in questo stato la direzione dello spin individuandone i suoi angoli polari Θ e Φ (si definisce direzione dello spin quella direzione lungo la quale la componente dello spin ha il valore ben definito $+\frac{\hbar}{2}$).

c) Si studi il caso particolare $\theta = 120°$ e $\varphi = 180°$.