Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Homework 1

Da consegnare entro il 22/12/2021

Le soluzioni vanno preferibilmente consegnate a mano oppure inoltrate in formato PDF ai docenti e al tutore del corso, con il nome e cognome dello studente in prima pagina. Si prega inoltre di numerare le pagine e dichiarare sempre quale esercizio si sta svolgendo.

1. Una particella libera di massa m in moto unidimensionale è descritta, all'istante $t = 0$, dalla seguente funzione d'onda normalizzata

$$\psi(x,0) = \frac{N}{x^2 + a^2} \ , \qquad \left(N = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}} \right) \ ,$$

con a costante positiva. Senza ricavare $\psi(x,t)$, ma applicando teoremi generali, si calcoli esplicitamente lo scarto quadratico medio di x all'istante generico $t > 0$, $(\Delta x)^2_t$, in termini di t, m, a e $\hbar$.
(Integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{\pi}{a^{2n-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} \ , \quad n \geq 2 \ .)$$

2. Una particella di massa m, in moto unidimensionale ed in uno stato di energia E, è soggetta al seguente potenziale (doppia barriera rettangolare)

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0, \ x > 2L) \ ; \\ V_1, & (0 < x < L) \ ; \\ V_2, & (L < x < 2L) \ ; \end{cases}$$

con $E > V_1 > V_2 > 0$.
Nell'ipotesi di particella incidente da sinistra e di validità delle condizioni seguenti: $k_1 = \frac{k_2}{2} = \frac{\pi}{L}$ ($k_{1,2} = \sqrt{2m(E - V_{1,2})/\hbar^2}$), scrivere la forma della corrispondente autofunzione su tutto l'asse x. Dalle condizioni di raccordo nei punti $x = 0$, $x = L$ e $x = 2L$ si verifichi, poi, la continuità della densità di corrente di probabilità e si calcoli il coefficiente di trasmissione della doppia barriera, giustificando fisicamente il risultato ottenuto.

3. Una particella di massa m, vincolata in una dimensione, è soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < x < a \ ; \\ V_0 \ , & a \leq x \leq a + b \ ; \\ +\infty \ , & x < 0 \ \text{ e } \ x > a + b \ . \end{cases}$$

a) Usando le condizioni di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld trovare l'equazione a cui deve soddisfare l'energia E della particella nel caso $E > V_0$.

b) Trovare l'analoga equazione per E che si ottiene risolvendo l'equazione di Schrödinger.

c) Mostrare che per $E \gg V_0$ le due equazioni sono equivalenti.

4. L'hamiltoniana di una particella di massa m in una dimensione è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + Ax^n$$

con n intero non negativo.

a) Per quali valori di A ed n il sistema ammette stati legati?

b) Calcolare il commutatore di xp con H.

c) Calcolare il valor medio del potenziale, $\langle V \rangle$, e dellenergia cinetica, $\langle T \rangle$, su uno stato stazionario di energia E, in termini di E.

d) Scrivere la relazione tra $\langle T \rangle$ e $\langle V \rangle$ (teorema del viriale quantistico).

5. Un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω e massa m è inizialmente (a $t = 0$) in uno stato corrispondente alla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\gamma x^2/2}$$

dove $\gamma \neq m\omega/\hbar$ è un parametro positivo.

a) Calcolare i valori di aspettazione delle osservabili

$$x, \quad p, \quad xp + px, \quad x^2, \quad p^2$$

all'istante $t = 0$.

b) Calcolare $\langle x^2 \rangle_t$ e $\langle p^2 \rangle_t$, per $t > 0$.

c) Scrivere il prodotto $(\Delta x)_t (\Delta p)_t$ e verificare che sia sempre maggiore di $\hbar/2$. Mostrare che è una funzione periodica del tempo, con quale periodo T?

d) Come diventa $(\Delta x)_t (\Delta p)_t$ se $\gamma = m\omega/\hbar$?