Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Homework 2

Da consegnare entro il 30/03/2022

Le soluzioni vanno inoltrate in formato PDF con il nome e cognome dello studente in prima pagina. Si prega inoltre di numerare le pagine e dichiarare sempre quale esercizio si sta svolgendo.

1. Al tempo $t = 0$ una particella soggetta ad un potenziale di oscillatore armonico è descritta dalla funzione d' onda:

$$\psi(x,0) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{2^n n!}} u_n(x)$$

dove le $u_n(x)$ sono le autofunzioni normalizzate dell'Hamiltoniana dell' oscillatore armonico, A una costante di normalizzazione e a una costante adimensionata positiva.

a) Trovare la costante di normalizzazione A.

b) Usando la funzione generatrice dei polinomi di Hermite

$$F(\xi, z) = e^{-z^2+2\xi z}$$

trovare la funzione d' onda all' istante $t > 0$, $\psi(x,t)$.

c) Mostrare che $|\psi(x,t)|^2$ è una funzione periodica del tempo e indicarne il periodo.

d) Calcolare il valor medio dell' energia.

2. Trovare i livelli energetici di una particella di massa m nel potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2, & x > 0 \ , \\ \infty \ , & x \leq 0 \ , \end{cases}$$

a) usando le condizioni di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld.

b) Confrontare il risultato ottenuto con quello che si deriva dall' equazione di Schrödinger.

3. Scrivere l' equazione agli autovalori per l' Hamiltoniana di una particella di massa m, in moto unidimensionale, sottoposta all' azione del potenziale seguente

$$V(x) = \begin{cases} +\infty \ , & (x \leq 0) \ ; \\ \dfrac{\hbar^2}{mx^2} \ , & x > 0 \ . \end{cases}$$

Per $x > 0$ si prendano autofunzioni della forma

$$u_k(x) = \left(a_1 + \frac{a_2}{\xi}\right)\sin\xi + \left(b_1 + \frac{b_2}{\xi}\right)\cos\xi \ , \qquad (\xi = kx, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}})$$

e si determinino le costanti a_1, a_2, b_1 e b_2 dall' equazione agli autovalori scritta, dalle condizioni al contorno e dalla ortonormalità delle autofunzioni ad una $\delta(k - k')$.

4. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m, pulsazione ω e hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ .$$

a) Si determinino i valori medi $\langle x \rangle_t$ e $\langle p \rangle_t$ all'istante t, in termini degli stessi valori medi all'istante $t = 0$, $\langle x \rangle_0$ e $\langle p \rangle_0$.

b) Si mostri che il valore medio di x^2 all'istante t, $\langle x^2 \rangle_t$, soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{d^2 \langle x^2 \rangle_t}{dt^2} + 4\omega^2 \langle x^2 \rangle_t = \frac{4\langle H \rangle}{m} \ . \tag{1}$$

c) Si ricavi la soluzione dell'equazione differenziale (1) e si scriva $(\Delta x)^2_t$ in termini di

$$\langle x^2 \rangle_0 \ , \quad \langle p^2 \rangle_0 \ , \quad \langle xp + px \rangle_0 \ .$$

d) Supponendo che la funzione d'onda all'istante iniziale, $\psi(x, 0)$, sia una funzione reale pari, scrivere come si semplifica $(\Delta x)^2_t$.

e) Nel caso di una funzione d'onda che soddisfi alle ipotesi del punto d), si consideri il limite $t << \omega^{-1}$ in $(\Delta x)^2_t$. Se con T e V si indicano l'energie cinetica e potenziale, si mostri che se $\langle V \rangle_0 > \langle T \rangle_0$ allora $\langle x^2 \rangle_t < \langle x^2 \rangle_0$, viceversa, se $\langle V \rangle_0 < \langle T \rangle_0$ allora $\langle x^2 \rangle_t > \langle x^2 \rangle_0$.

5. Si consideri una particella libera in moto unidimensionale descritta, all'istante iniziale $t = 0$, dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = N \left(e^{ik_0 x} e^{-\alpha(x+x_0)^2/2} + e^{-ik_0 x} e^{-\alpha(x-x_0)^2/2} \right)$$

dove $\alpha > 0$ e $x_0, k_0 \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare la costante di normalizzazione N e i valori medi di x e x^2 all'istante $t = 0$.

b) Calcolare la funzione d'onda nello spazio degli impulsi all'istante $t = 0$, $\widetilde{\psi}(k, 0)$.

c) Scrivere la densità di probabilità di impulso e trovare i valori medi $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, l'indeterminazione Δp e verificare le relazioni di indeterminazione di Heisenberg all'istante $t = 0$.

d) Descrivere come si calcola la funzione d'onda all'istante t. Il risultato è

$$\psi(x, t) = \frac{N}{\sqrt{z}} e^{-i\frac{\hbar k_0^2 t}{2m}} \left[e^{ik_0 x} e^{-\frac{\alpha}{2z}(x+x_0-v_0 t)^2} + e^{-ik_0 x} e^{-\frac{\alpha}{2z}(x-x_0+v_0 t)^2} \right]$$

dove la quantità complessa z è data da $z = 1 + i\frac{\hbar \alpha t}{m}$ e $v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$. Scrivere la densità di probabilità di posizione $\rho(x, t)$. Come si comporta per tempi grandi?

e) Calcolare la denistà di probabilità di trovare la particella all'origine $\rho(0, t)$ e discutere la sua dipendenza dal tempo considerando il rapporto $\rho(0, t)/\rho(0, 0)$.

Formule utili:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 e^{-\beta(s \pm s_0)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left(s_0^2 + \frac{1}{2\beta} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-\beta s^2 + i\gamma s} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\gamma^2/(4\beta)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 e^{-\beta s^2 + i\gamma s} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{\gamma^2}{4\beta^2} \right) e^{-\gamma^2/(4\beta)}$$

con $\beta > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.