

## Homework 3

Da consegnare entro il 29/4/2022

**Le soluzioni vanno inoltrate in formato PDF con il nome e cognome dello studente in prima pagina. Si prega inoltre di numerare le pagine e dichiarare sempre quale esercizio si sta svolgendo.**

1. Una particella che si muove nello spazio tridimensionale è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi(r) = Ne^{-\alpha r} \quad (1)$$

dove  $N$  è un fattore di normalizzazione e  $\alpha$  un parametro reale.

a) Calcolare la costante di normalizzazione  $N$ .

b) Calcolare i valori di aspettazione

$$\langle \vec{r} \rangle, \quad \langle r \rangle, \quad \langle r^2 \rangle,$$

nello stato (1).

c) Calcolare le varianze  $(\Delta \vec{r})^2$  e  $(\Delta r)^2$ .

d) Calcolare la probabilità di trovare la particella nella regione

$$r > \Delta r$$

e) Se la funzione d'onda (1) descrive una particella libera all'istante  $t = 0$  determinare la funzione d'onda nello spazio dei momenti  $\tilde{\psi}(\vec{k}, t)$  ad ogni istante  $t > 0$ .

f) Calcolare la varianza  $(\Delta \vec{p})^2$ .

g) Mostrare che la funzione d'onda all'istante  $t$  è isotropa, cioè che

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, t)$$

qual è il valore di aspettazione di  $\vec{r}$  all'istante  $t$ ,  $\langle \vec{r} \rangle_t$ .

2. Trovare, al primo ordine perturbativo, il cambiamento nei livelli energetici di un atomo idrogenoide prodotto dall'incremento di un'unità della carica nucleare (dovuto, per esempio, ad un'emissione beta). Usando il risultato esatto per le energie di questi livelli, prima e dopo l'incremento, discutere la validità dell'approssimazione usata.

3. Un atomo di idrogeno si trova in prossimità di un buco nero di Schwarzschild. A causa della curvatura dello spazio-tempo, l'hamiltoniana totale del sistema è modificata rispetto a quella dell'atomo di idrogeno dalla seguente hamiltoniana

$$H' = kr^2(1 - 3 \cos^2 \theta)$$

dove  $k$  è una costante il cui valore è  $k = GMm/(2R^3)$ , dove  $G$  è la costante di Newton,  $M$  la massa del buco nero,  $m$  la massa dell'elettrone ed  $R$  la distanza tra l'atomo di idrogeno e il centro del buco nero. Si supponga di essere in un regime perturbativo in cui  $k \ll 1$ . L'hamiltoniana totale del sistema è data da  $H_0 + H'$  dove  $H_0$  è

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{r}$$

- Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale di  $H_0$  al primo ordine nella teoria perturbativa.
- Mostrare che gli elementi di matrice  $(u_{2lm}(r, \theta, \phi), H' u_{2l'm'}(r, \theta, \phi)) = 0$  se  $m \neq m'$ , dove  $u_{2lm}(r, \theta, \phi)$  sono le autofunzioni di  $H_0$  corrispondenti ad  $n = 2$ .
- Calcolare la correzione all'energia del primo stato eccitato al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

Si ricordi che:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_2^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

Le autofunzioni dell'atomo di idrogeno  $u_{nlm}$  con  $n = 2$  sono:

$$\begin{aligned} u_{200} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \\ u_{211} &= -\frac{1}{4\sqrt{4\pi a_0^3}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin \theta e^{i\varphi} \\ u_{210} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos \theta \\ u_{21-1} &= \frac{1}{4\sqrt{4\pi a_0^3}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin \theta e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

dove  $a_0$  è il raggio di Bohr.

4. Una particella si muove in un potenziale centrale attrattivo della seguente forma:

$$V(r) = A_n r^n$$

( $n = -1, 1, 2, 3, \dots$ ; inoltre, ovviamente:  $A_{-1} < 0$ ,  $A_n > 0$  per  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Si applichi il metodo variazionale allo stato fondamentale ( $l = 0$ ) usando

$$\psi(\vec{r}) = e^{-\alpha r}, \quad (\alpha > 0)$$

come funzione di prova con parametro variazionale  $\alpha$ . Per  $n = -1$  e  $n = +2$  confrontare i risultati ottenuti con quelli esatti.

5. Si scriva l'hamiltoniana dell'atomo di elio.

- Qual è lo stato fondamentale dell'atomo di elio se si trascura la repulsione tra gli elettroni? Qual è il primo stato eccitato?
- Calcolare il valore di aspettazione del momento di dipolo magnetico dell'atomo di elio sullo stato fondamentale trovato in a).
- Considerando l'hamiltoniana di interazione tra gli elettroni come perturbazione, scrivere lo splitting tra le energie dei due possibili stati  $1s2s$  senza calcolare esplicitamente gli integrali.
- Supponendo che un atomo di elio al tempo  $t = 0$  abbia un elettrone in uno stato  $1s$  dell'atomo di idrogeno con spin up e un elettrone in uno stato  $2s$  con spin down, scrivere lo stato dell'atomo ad un tempo successivo  $t > 0$ .