Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

# Homework 4

Da consegnare entro il 20/5/2022

**Le soluzioni vanno inoltrate in formato PDF con il nome e cognome dello studente in prima pagina. Si prega inoltre di numerare le pagine e dichiarare sempre quale esercizio si sta svolgendo.**

**1.** Una particella di massa $m$ e carica positiva $q$ in moto unidimensionale è soggetta ad un campo elettrico uniforme dato da $E(x) = \mathcal{E}\,[\theta(x) - \theta(-x)]$ dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside.

**a)** Scrivere l'hamiltoniana del sistema.

**b)** Si stimi l'energia dello stato fondamentale utilizzando le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld scritte nella forma:

$$\oint p(x)dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) 2\pi\hbar$$

per tenere conto del principio di indeterminazione.

**c)** Si consideri una funzione di prova del tipo $\psi(x) = Ne^{-\alpha|x|}$ e si stimi l'energia dello stato fondamentale con il metodo variazionale.

**d)** Determinare lo spettro degli autovalori dell'energia risolvendo l'equazione agli autovalori per l'hamiltoniana. Usare per gli zeri della funzione di Airy $Ai(z)$, e della sua derivata $Ai'(z)$ (tutti sul semiasse negativo) l' espressione approssimata

$$z_n \simeq -\left[\frac{3\pi}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^{2/3} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

che dà, alternativamente, gli zeri di $Ai'(z)$ (per $n$ pari) e quelli di $Ai(z)$ (per $n$ dispari) con un errore del 9% per $z_0$ e inferiore al 1% per tutti gli altri, errore che diminuisce rapidamente al crescere di $n$.

**e)** Si confrontino i risultati ottenuti per l'energia dello stato fondamentale e si dica quale è più vicino a quello dato dalla soluzione numerica esatta del problema.

$$E \simeq 0.8086 \left(\frac{\hbar^2 q^2 \mathcal{E}^2}{m}\right)^{1/3} .$$

**2.** Si consideri un operatore $\vec{V}$ le cui componenti, $V_i$, $i = x, y, z$, soddisfano alla relazioni di commutazione

$$[V_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k \tag{1}$$

dove $\vec{L}$ è l'operatore momento angolare. $\vec{V}$ è, per definizione, un *operatore vettoriale*.

a) Per gli operatori

$$V_i' = e^{i\phi L_x/\hbar} V_i e^{-i\phi L_x/\hbar} \ , \quad i = x, y, z$$

si dimostri che valgono le seguenti equazioni differenziali

$$\frac{dV_x'}{d\phi} = 0 \ , \qquad \frac{dV_y'}{d\phi} = -V_z' \ , \qquad \frac{dV_z'}{d\phi} = V_y' \ . \tag{2}$$

b) Risolvendo le equazioni differenziali (2) provare che l'operatore $e^{i\phi L_x/\hbar}$ è un operatore di rotazione che genera una rotazione attorno all'asse-$x$ di un angolo $\phi$ mostrando che

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = e^{i\phi L_x/\hbar} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} e^{-i\phi L_x/\hbar} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} .$$

c) Provare che

$$e^{-i\pi L_x/\hbar} Y_\ell^m = Y_\ell^{-m}$$

dove le $Y_\ell^m$ sono le armoniche sferiche.

d) Si consideri ora un elettrone dotato di spin. Come si modifica il suo stato $\psi$ se si ruota prima di $-\pi$ attorno all'asse-$z$, poi di $-\pi$ attorno all'asse-$y$ e infine di $-\pi$ intorno all'asse-$x$?

**3.** Due particelle identiche di massa $m$ e spin 1/2, sono vincolate a stare all' interno di una sfera di raggio $a$ (buca di potenziale sferica di profondità infinita, cioè $V(r) = 0$ per $r \leq a$ e $V(r) = +\infty$ per $r > a$).

a) Nel caso che le due particelle non siano interagenti, scrivere l' energia dello stato fondamentale del sistema (entrambe le particelle, ovviamente, in stati $s$) e l' autofunzione corrispondente complessiva.

b) Si supponga ora che sia presente una debole interazione tra le due particelle descritta dalla seguente hamiltoniana di perturbazione:

$$H_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)^2 \cdot (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \ ,$$

($\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$= matrici di Pauli delle due particelle). Calcolare la correzione perturbativa al primo ordine all'energia del livello fondamentale imperturbato ottenuta al punto a, precisando le condizioni sul parametro $\omega$ necessarie per l'applicabilità del metodo perturbativo.

**4.** Un atomo di idrogeno si trova immerso in un campo magnetico esterno diretto come l'asse $z$, $\vec{B} = B\hat{k}$. Assumendo che l'atomo sia inizialmente, cioè al tempo $t = 0$, nello stato $\psi^\ell_{n,J,M}$, con $J = \ell + \frac{1}{2}$, calcolare le probabilità di trovare l'atomo ad un istante successivo $t > 0$ negli stati, $\psi^\ell_{n,J',M}$ con $J' = \ell + \frac{1}{2}$ e $J' = \ell - \frac{1}{2}$. Si trascurino le correzioni di struttura fine e iperfine.

**5.** Un atomo di idrogeno è posto in un campo elettrico omogeneo dato da:

$$\vec{E}(t) = \frac{B}{\pi e a_0} \frac{\tau}{t^2 + \tau^2} \hat{n}$$

dove $B$ e $\tau$ sono delle costanti con le dimensioni di $\hbar$ e tempo rispettivamente, $e$ è la carica dell' elettrone ed $\hat{n}$ è il versore di una direzione generica. Se al tempo $t = -\infty$ l'atomo è nel suo stato fondamentale, calcolare la probabilità che esso sia nello stato $2p$ a $t = \infty$.