

Corso di
MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

10 febbraio 2021

- Ogni problema vale 15/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω e massa m , all'istante iniziale ($t = 0$) è in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = N(1 + \sqrt{2}\alpha x)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2},$$

dove $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ e N una costante di normalizzazione.

- Calcolare la costante di normalizzazione N .
- Trovare la funzione d'onda del sistema all'istante $t > 0$.
- Determinare il valor medio dell'energia e di \hat{x} , \hat{p} , \hat{x}^2 , \hat{p}^2 al generico istante $t > 0$ e scrivere le relazioni di indeterminazione a $t > 0$.
- Mostrare che al variare di t vale sempre la seguente relazione:

$$\frac{\hbar^2}{2} \leq (\Delta x)_t^2 (\Delta p)_t^2 \leq \frac{9\hbar^2}{16}.$$

2. Una particella a riposo di massa m , spin 1/2 e momento magnetico $\vec{\mu} = \frac{2\mu_B}{\hbar}\vec{S}$, dove $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ è il magnetone di Bohr, si trova in un campo magnetico uniforme e costante diretto lungo l'asse x , $\vec{B} = (B_0, 0, 0)$.

- Scrivere l'hamiltoniana H_0 del sistema.
- Se al tempo $t = 0$ lo stato della particella è descritto dallo spinore $\chi(0) = \chi_+^y$, autostato dell'operatore S_y con autovalore $+\hbar$, determinare la forma dello spinore ad un tempo t generico, $\chi(t)$.
- Calcolare il valor medio di \vec{S} all'istante t .

Si supponga poi di introdurre un ulteriore, debole, campo magnetico:

$$\vec{B}_1(t) = B_1 \left[\hat{j} \cos(\omega t) - \hat{k} \sin(\omega t) \right]$$

per un tempo $0 < t < T$.

- Scrivere l'hamiltoniana di perturbazione H_P .
- Se al tempo $t = 0$ lo stato della particella è descritto dallo spinore χ_+^x , autostato dell'operatore S_x con autovalore $+\hbar$, determinare la probabilità di uno spin flip, al primo ordine perturbativo, per $t > T$.