Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

16 giugno 2022

- Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 10/20.
- È permessa la consultazione di un libro di testo e degli appunti del corso.

1. **8 punti**

Si considerino un paio di particelle identiche libere di massa m. Per semplicità si supponga che si muovano in una dimensione e si trascuri lo spin. Ogni particella è descritta in termini di una funzione d'onda reale, ben localizzata attorno ai punti a e $-a$ rispettivamente, data da:

$$\psi_{\pm}(x) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\beta}{2}(x \mp a)^2\right]$$

dove $\beta >> 1/a^2$.

a) Si scriva la funzione d'onda normalizzata del sistema nel caso di bosoni e di fermioni.

b) Si calcoli il valore di aspettazione dell'energia $\mathcal{E}$.

c) Calcolando la forza effettiva $\mathcal{F} = -\frac{d\mathcal{E}}{da}$ tra le due particelle, mostrare che se queste sono fermioni allora c'è una repulsione effettiva tra loro.

d) Si confronti con il caso di due bosoni.

2. **6 punti**

L'interazione tra il momento magnetico dell'elettrone e il momento magnetico del protone in un atomo di idrogeno si può scrivere nella forma:

$$H_{\text{hf}} = -\left(\vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_p\right) \nabla^2 \frac{1}{r} + \left(\vec{\mu}_e \cdot \vec{\nabla}\right)\left(\vec{\mu}_p \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{1}{r} \ .$$

Si consideri un atomo di idrogeno in cui il protone sia rimpiazzato da un deutone, uno stato legato di spin-1 composto da un protone e un neutrone.

Si calcoli lo splitting iperfine dovuto a questa interazione quando l'atomo (di deuterio) è nello stato: $n = 1,\ \ell = 0,\ m_\ell = 0, m_{s_e} = \frac{1}{2}, m_{s_d} = 1$.

[Suggerimenti: si indichi con g_d il rapporto giromagnetico del deutone (che vale 0.8574382338(±22)), si tenga conto che $\frac{1}{r}$ è la funzione di Green del laplaciano:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$$

e che integrando su una funzione della sola $r = |\vec{r}|$, $f(r)$, si ha:

$$\int d\vec{r} f(r) \left(\vec{\mu}_e \cdot \vec{\nabla}\right)\left(\vec{\mu}_p \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{1}{r} = \frac{1}{3} \int d\vec{r} f(r) \left(\vec{\mu}_e \cdot \vec{\mu}_p\right) \nabla^2 \frac{1}{r} \ .]$$

3. **6 punti**

Si consideri un atomo di idrogeno nel livello $n = 2$ soggetto alla perturbazione $H_{\rm p} = \gamma(a_0 z + xy)$, dove a_0 è il raggio di Bohr.

a) Usando solo le regole di selezione e la parità degli operatori in H_p si scriva la forma della matrice di perturbazione, senza calcolare esplicitamente gli elementi di matrice.

b) Si calcolino le correzioni all'autovalore imperturbato e si determini se la degenerazione sia rimossa completamente o no.

[Suggerimento: si ordinino gli stati come segue $u_{200},\ u_{210},\ u_{21-1},\ u_{211}$.]