

Corso di
MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

17 ottobre 2019

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Una particella libera che si muove in una dimensione è descritta all'istante $t = 0$ dalla funzione d'onda normalizzata

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0x - \alpha x^2/2} \quad (1)$$

dove α e k_0 sono parametri reali e $\alpha > 0$.

- Calcolare al tempo $t > 0$ la funzione d'onda nello spazio dei numeri d'onda k , $\tilde{\psi}(k, t)$, e la corrispondente densità di probabilità $\sigma(k)$. Qual è il valore più probabile dell'impulso?
- Usando il risultato del punto a), calcolare gli scarti quadratici medi $(\Delta x)_t$ e $(\Delta p)_t$ all'istante t e mostrare che soddisfano alle relazioni di indeterminazione.
- Calcolare lo scarto quadratico medio dell'energia ΔE .
- Si consideri la quantità

$$\tau = \frac{(\Delta x)_t}{|d\langle x \rangle_t/dt|}$$

che ha le dimensioni di un tempo e rappresenta una caratteristica scala temporale in cui lo sparpagliamento del pacchetto diventa significativo rispetto alle variazioni del moto del centro. Mostrare che per questo tempo τ vale la disuguaglianza

$$\tau \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} .$$

(Integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-k^2/\alpha} = \sqrt{\alpha\pi} , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 e^{-k^2/\alpha} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\alpha\pi} , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dk k^4 e^{-k^2/\alpha} = \frac{3\alpha^2}{4} \sqrt{\alpha\pi} .)$$

2. Si consideri uno stato con momento angolare orbitale $\ell = 1$ (per esempio uno stato con $n = 2$ e $\ell = 1$ nell'atomo idrogenoide).
- Si trovi una direzione \hat{n} caratterizzata dagli angoli (θ, φ) , tale che questo stato sia un autostato dell'operatore $\hat{n} \cdot \vec{L}$.
 - Si trovi per quali valori di θ e φ questo stato diventa autostato di L_x e di L_y .

- 3.** Si scriva l'hamiltoniana dell'atomo di elio.
- a) Qual è lo stato fondamentale dell'atomo di elio se si trascura la repulsione tra gli elettroni? Qual è il primo stato eccitato?
 - b) Calcolare il valore di aspettazione del momento di dipolo magnetico dell'atomo di elio sullo stato fondamentale trovato in **a**).
 - c) Considerando l'hamiltoniana di interazione tra gli elettroni come perturbazione, scrivere lo splitting tra le energie dei due possibili stati $1s2s$ senza calcolare esplicitamente gli integrali.