Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

Meccanica Quantistica

Prova Scritta

18 gennaio 2022

- Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 10/20.
- È permessa la consultazione di un libro di testo e degli appunti del corso.

1. **7 punti**

Una particella in una buca di potenziale infinita, è in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = Ax(a-x) \ ,$$

dove a è la larghezza della buca e A è una costante di normalizzazione. Trovare la distribuzione di probabilità per le differenti energie della particella, il valor medio e la dispersione dell'energia.

(Suggerimento, possono risultare utili le seguenti serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \ .)$$

2. **6 punti**

Si consideri un sistema la cui hamiltoniana è $H = \frac{g}{4}(L_+L_-)^2$. Al tempo $t=0$ lo stato del sistema è descritto dalla funzione d'onda $\psi(0) = A\sin\theta\sin\varphi$;

1) determinare la costante di normalizzazione A;

2) determinare l'evoluzione temporale della funzione d'onda;

3) a quale tempo successivo essa diviene $\psi(t) = A\sin\theta\cos\varphi$ a meno di una fase.

3. **7 punti**

I neutrini sono particelle neutre che hanno tre possibili "sapori", ν_e, ν_μ e ν_τ. L'osservazione delle oscillazioni dei neutrini, cioè processi di transizione del tipo $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, è una prova del fatto che queste particelle hanno una massa non nulla.

a) Si consideri per semplicità due sole specie di neutrino, cioè gli autovettori di sapore $|\nu_e\rangle$ e $|\nu_\mu\rangle$. Ignorando i gradi di libertà spaziali e trattando l'impulso come un parametro, l'hamiltoniana è una matrice 2×2 con autovettori $|\nu_1\rangle$ e $|\nu_2\rangle$ e autovalori $E_{1,2} = \sqrt{p^2c^2 + m_{1,2}^2c^4} \simeq pc + m_{1,2}^2c^3/2p$. Se gli autostati di sapore sono legati a quelli di energia da

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle \ , \qquad |\nu_\mu\rangle = -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle$$

dove θ è un parametro, si calcoli la matrice che rappresenta l'operatore di evoluzione temporale nella base degli autostati di sapore.

b) Se all'istante $t=0$ il sistema è in uno stato di neutrino elettronico, $|\psi(0)\rangle = |\nu_e\rangle$, si trovi la probabilità, $P_{e\to\mu}(t)$ che ci sia una transizione $e\to\mu$, al variare del tempo. Si faccia lo stesso per $P_{e\to e}(t)$. Alternativamente, si assuma che all'istante iniziale il sistema sia in uno stato di neutrino muonico, $|\psi(0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$ e si calcolino le analoghe probabilità $P_{\mu\to e}(t)$ e $P_{\mu\to\mu}(t)$.

c) Si consideri una situazione in cui neutrini elettronici con una certa densità numerica siano emessi da una sorgente e la loro densità numerica sia poi misurata ad una distanza molto grande dalla sorgente. Si derivi una relazione tra $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ e la distanza a cui è massima la conversione a neutrini muonici.