Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

18 ottobre 2017

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Una particella di massa m, in moto unidimensionale, è immersa in un campo di forza uniforme (potenziale $V(x) = ax$). Facendo ripetuto uso del teorema di Ehrenfest, dimostrare le seguenti identità valide, qualunque sia lo stato $\psi(x,t)$ della particella, per lo scarto quadratico medio di x all' istante generico $t > 0$, $(\Delta x)_t^2 = \langle x^2 \rangle_t - \langle x \rangle_t^2$:

$$\frac{d}{dt}(\Delta x)_t^2 = \frac{1}{m}\left(\langle xp + px \rangle_t - 2\langle x \rangle_t \langle p \rangle_t\right) \ ,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)_t^2 = \frac{2}{m^2}\left(\langle p^2 \rangle_t - \langle p \rangle_t^2\right) = \frac{2}{m^2}(\Delta p)_t^2 \ , \qquad \frac{d^3}{dt^3}(\Delta x)_t^2 = 0 \ .$$

Da queste identità ricavare $(\Delta x)_t^2$ come funzione esplicita del tempo mostrando che ha la stessa forma valida per particella libera.

2. Due particelle identiche di massa m e spin 1/2, sono vincolate a stare all' interno di una sfera di raggio a (buca di potenziale sferica di profondità infinita, cioè $V(r) = 0$ per $r \leq a$ e $V(r) = +\infty$ per $r > a$).

a) Nel caso che le due particelle non siano interagenti, scrivere l' energia dello stato fondamentale del sistema (entrambe le particelle, ovviamente, in stati s) e l' autofunzione corrispondente complessiva.

b) Si supponga ora che sia presente una debole interazione tra le due particelle descritta dalla seguente hamiltoniana di perturbazione:

$$H_p = \frac{1}{2}m\omega^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \cdot (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \ ,$$

($\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$= matrici di Pauli delle due particelle). Calcolare la correzione perturbativa al primo ordine all'energia del livello fondamentale imperturbato ottenuta al punto a, precisando le condizioni sul parametro ω necessarie per l'applicabilità del metodo perturbativo.

3. Una particella di spin 1/2 è descritta dalla funzione d' onda spinoriale:

$$\psi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\varphi} \\ 2\cos\theta \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Discutere se (1) sia un autostato di L^2, J^2 e J_z e, nel caso in cui lo sia, con quali autovalori.