Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

# Prova Scritta

19 luglio 2017

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

**1.** In un problema unidimensionale, lo stato di una particella di massa $m$ che si trova in una buca di potenziale di profondità infinita

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \le \frac{L}{2} \ , \\ +\infty & |x| > \frac{L}{2} \ , \end{cases} \ ,$$

è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ . \tag{1}$$

a) Imponendo le condizioni al contorno, che (1) sia ortogonale alla funzione d' onda dello stato fondamentale della buca infinita di potenziale e richiedendo la normalizzazione, si ricavino le costanti $a,\ b,\ c$ e $d$.

b) Con le costanti determinate in a, si calcoli il valor medio dell' energia $E$ nello stato (1) e l' errore relativo tra $E$ e il valore esatto dell'energia del primo stato eccitato $E_2$.

**2.** L' hamiltoniana di una particella di spin 1/2 è data da

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2I} + a\vec{L} \cdot \vec{S} \ ,$$

dove $\vec{L}$ e $\vec{S}$ sono rispettivamente il momenti angolari orbitale e di spin, $a$ e $I$ due costanti reali e positive.

a) Costruire (in termini delle funzioni sferiche e degli autospinori di $S_z$, $\chi_\pm$) i due autostati simultanei di $\vec{J}^2$, $\vec{L}^2$ e $J_z$ corrispondenti rispettivamente agli autovalori: $\frac{15}{4}\hbar^2$, $2\hbar^2$, $\hbar/2$ (per il primo) e: $\frac{3}{4}\hbar^2$, $2\hbar^2$, $\hbar/2$ (per il secondo). Mostrare anche che questi due stati sono autostati di $H$ e determinarne i due autovalori relativi.

b) Se all' istante $t = 0$ il sistema si trova in un autostato di $\vec{L}^2$, $L_z$ e $S_z$ corrispondente, rispettivamente, agli autovalori: $2\hbar^2$, 0, $\hbar/2$, scrivere lo stato del sistema al generico istante $t > 0$. Dire, infine, dopo quale intervallo minimo di tempo $T$ il sistema torna allo stato iniziale, a meno di un fattore di fase globale.

**3.** Sia dato un sistema di due particelle identiche di spin generico $s$ (come di consueto, $s$ è il numero quantico legato all' autovalore $s(s+1)\hbar^2$ dell' operatore $\vec{S}^2$, essendo $\vec{S}$ il momento di spin di ciascuna particella).

a) Mostrare che il rapporto tra il numero di stati di spin simmetrici, rispetto allo scambio delle due particelle e il numero di stati antisimmetrici è $\dfrac{s+1}{s}$.

b) Supponiamo poi che la funzione d' onda del sistema sia fattorizzabile in una parte orbitale e in una parte di spin e che la parte orbitale sia simmetrica rispetto allo scambio delle coordinate spaziali delle due particelle. Dire quanti sono i possibili stati indipendenti di spin.