

Prova Scritta

23 luglio 2018

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Un sistema "a tre livelli" è descritto dall' hamiltoniana

$$H = H_0 + H' = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 \end{pmatrix} - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

- a) Determinare gli autovalori dell' hamiltoniana totale, $H_0 + H'$, e gli autostati corrispondenti allo stato fondamentale, $\tilde{\psi}_1$, al primo, $\tilde{\psi}_2$, e al secondo stato eccitato, $\tilde{\psi}_3$, in termini degli autostati ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 dell' hamiltoniana H_0 .
- b) Come si verifica facilmente, l' hamiltoniana (1) commuta con l' operatore

$$\Pi \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Pi^2 = \mathbf{1}$$

Discutere le conseguenze di questo fatto sul risultato del punto a).

- c) Esprimere gli stati ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 in termini dei tre autostati dell' energia.

- d) All' istante $t = 0$ il sistema è nello stato $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, determinare la funzione d' onda all' istante t , $\psi(t)$, in termini degli stati ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 . Determinare la probabilità $P_2(t)$ che all' istante t la particella si trovi nello stato ψ_2 e fare un grafico schematico di $P_2(t)$.

2. Un oscillatore armonico isotropo tridimensionale di massa m , carica elettrica q e di spin $\frac{1}{2}$ è sottoposto ad un campo magnetico esterno debole, omogeneo e statico, $\vec{B} = (0, 0, B)$.

- a) Scrivere l'hamiltoniana del sistema.
- b) Considerando prima il caso senza campo magnetico, dire quali sono i livelli energetici, qual è la degenerazione di ciascun livello e, per i primi tre livelli energetici, dare i valori possibili del momento angolare orbitale e del momento angolare totale.
- c) Considerando ora il campo magnetico B non nullo, nell' approssimazione in cui i termini quadratici in B siano trascurati (campo debole), dire quali sono gli operatori conservati.
- d) Sfruttando i risultati dei punti b) e c) trovare gli autovalori esatti dell' energia (sempre in approssimazione di campo debole) per il primo livello eccitato del punto b).

- 3.** Un elettrone, considerato qui come una particella carica (carica $-e$) e senza spin, si muove in un piano (x, y) , in un campo magnetico costante e uniforme in direzione perpendicolare al piano, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Studiare lo spettro del sistema, assumendo come potenziale vettore $\vec{A} = (-By, 0, 0)$.