Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

Meccanica Quantistica

Prova Scritta

22 febbraio 2019

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. L'Hamiltoniana che descrive la molecola dell'ammoniaca è data dalla seguente espressione

$$H = \begin{pmatrix} E_0 + \mu\epsilon & \delta \\ \delta & E_0 - \mu\epsilon \end{pmatrix} \tag{1}$$

dove E_0 è un'energia positiva, μ rappresenta il momento di dipolo della molecola di ammoniaca ed ϵ il campo elettrico esterno. δ è una costante con le dimensioni di energia.

Assumendo che $|\delta| \ll E_0 \pm \mu\epsilon$, si può utilizzare la teoria delle perturbazioni per tener conto dell'effetto di δ sul sistema.

a) Si consideri $\mu\epsilon \neq 0$. Calcolare le correzioni all'energia del sistema imperturbato al primo e secondo ordine in δ. Suggerimento: Calcolare come prima cosa gli autostati e autovalori relativi al sistema imperturbato.

b) Sia ora $\mu\epsilon = 0$. Calcolare la prima correzione perturbativa all'energia del sistema imperturbato.

c) Calcolare gli autovalori esatti dell'Hamiltoniana H e confrontare il risultato con i risultati dei punti precedenti.

2. Al tempo $t < 0$ una particella di massa m si trova nello stato fondamentale dell'oscillatore armonico unidimensionale la cui Hamiltoniana è data da

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k_0 x^2 \tag{2}$$

con k_0 costante reale positiva. Al tempo $t = 0$, l'Hamiltoniana del sistema diventa

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\left(k_0 + k' e^{-t/\tau}\right) x^2 \tag{3}$$

dove τ è un tempo caratteristico e k' è una costante positiva che soddisfa $k' \ll k_0$.

a) Scrivere H al tempo $t > 0$ come $H = H_0 + H'(t)$ e calcolare il valore di aspettazione di $H'(t)$ sullo stato fondamentale $u_0(x)$ di H_0.

b) Utilizzare la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine per calcolare la probabilità che il sistema si trovi nel primo stato eccitato dell'Hamiltoniana imperturbata H_0 al tempo $t = \infty$.

c) Qual è la probabilità che il sistema si trovi rispettivamente nello stato fondamentale, nel primo stato eccitato o nel secondo stato eccitato dell'Hamiltoniana imperturbata H_0 a $t = \infty$? (Si utilizzi di nuovo la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine).

3. Due particelle di spin 1/2 si trovano nello stato di singoletto. Sia $S_a^{(1)}$ la componente del momento angolare di spin della particella 1 lungo la direzione definita dal vettore unitario $\hat{a}$. Analogamente, sia $S_b^{(2)}$ la componente del momento angolare di spin della particella 2 lungo la direzione definita dal vettore unitario $\hat{b}$.

a) Mostrare che

$$< S_a^{(1)} S_b^{(2)} >= -\frac{\hbar^2}{4}\cos\theta \tag{4}$$

dove θ è l'angolo tra $\hat{a}$ e $\hat{b}$.