Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

23 Settembre 2020

- È permessa la consultazione di un solo libro di testo.

1. Si consideri una particella libera in moto unidimensionale descritta, all'istante iniziale $t = 0$, dalla funzione d'onda

$$\psi(x,0) = N\left(e^{ik_0x}e^{-\alpha(x+x_0)^2/2} + e^{-ik_0x}e^{-\alpha(x-x_0)^2/2}\right)$$

dove $\alpha > 0$ e $x_0, k_0 \in \mathbb{R}$.

a) Calcolare la costante di normalizzazione N e i valori medi di x e x^2 all'istante $t = 0$.

b) Calcolare la funzione d'onda nello spazio degli impulsi all'istante $t = 0$, $\widetilde{\psi}(k,0)$.

c) Scrivere la densità di probabilità di impulso e trovare i valori medi $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, l'indeterminazione Δp e verificare le relazioni di indeterminazione di Heisenberg all'istante $t = 0$.

d) Descrivere come si calcola la funzione d'onda all'istante t. Il risultato è

$$\psi(x,t) = \frac{N}{\sqrt{z}}e^{-i\frac{\hbar k_0^2 t}{2m}}\left[e^{ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2z}(x+x_0-v_0t)^2} + e^{-ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2z}(x-x_0+v_0t)^2}\right]$$

dove la quantità complessa z è data da $z = 1 + i\frac{\hbar\alpha t}{m}$ e $v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$. Scrivere la densità di probabilità di posizione $\rho(x,t)$. Come si comporta per tempi grandi?

e) Calcolare la denistà di probabilità di trovare la particella all'origine $\rho(0,t)$ e discutere la sua dipendenza dal tempo considerando il rapporto $\rho(0,t)/\rho(0,0)$.

Formule utili:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 e^{-\beta(s\pm s_0)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left(s_0^2 + \frac{1}{2\beta}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-\beta s^2 + i\gamma s} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\gamma^2/(4\beta)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds s^2 e^{-\beta s^2 + i\gamma s} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left(\frac{1}{2\beta} - \frac{\gamma^2}{4\beta^2}\right)e^{-\gamma^2/(4\beta)}$$

con $\beta > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.

2. Una particella di massa m è legata in un potenziale centrale $V(r)$. La particella è in un autostato normalizzato dell'hamiltoniana e del momento angolare, $\psi_{E\ell m}$.

a) Si consideri l'operatore

$$G = \vec{r}\cdot\vec{p} + \vec{p}\cdot\vec{r}\ ,$$

calcolare il valor medio di G su $\psi_{E\ell m}$.

b) Calcolare la derivata temporale del valor medio di G su uno stato generico.

c) Applicando il risultato del punto b) allo stato $\psi_{E\ell m}$, mostrare il legame tra i valor medi dell'energia cinetica e di $r\frac{dV(r)}{dr}$.

d) Applicare il risultato del punto c) al caso del potenziale dell'atomo di idrogeno, dimostrare il teorema del viriale e calcolare i valori medi dell'energia cinetica e potenziale.