

Corso di
MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

24 febbraio 2021

- Ogni problema vale 15/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Un oscillatore armonico isotropo in due dimensioni è descritto dall'hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}k (x^2 + y^2) , \quad (k > 0) .$$

a) Scrivere autovalori e autofunzioni di H discutendo la degenerazione.

Il sistema è poi soggetto alla perturbazione stazionaria:

$$H_p = \lambda x^2 y^2 , \quad 0 < \lambda \ll 1 .$$

- b) Calcolare le correzioni all'energia dello stato fondamentale al primo e al secondo ordine perturbativo.
- c) Calcolare le correzioni del livello con energia $2\hbar\omega$, al primo ordine perturbativo, discutendo l'eventuale rimozione della degenerazione.

Si consideri poi il sistema nello stato fondamentale di H , soggetto alla perturbazione dipendente dal tempo:

$$H_1(t) = \theta(t)x^2y^2e^{-t/\tau} , \quad (\tau > 0) ,$$

dove $\theta(t)$ è la funzione di Heaviside.

d) Calcolare la probabilità di transizione, per $t \rightarrow +\infty$ verso uno degli stati raggiungibili di energia $3\hbar\omega$.

2. Si consideri un atomo di idrogeno che, all'istante $t = 0$, si trova nello stato:

$$\psi(t = 0) = \mathcal{N} (\psi_{100} + 4\psi_{210} + 2\psi_{211} + 2\psi_{21-1})$$

dove $\psi_{n\ell m}$ sono le autofunzioni normalizzate dell'hamiltoniana dell'atomo di idrogeno corrispondenti ai numeri quantici (n, ℓ, m) dell'insieme di osservabili mutuamente commutanti H, L^2, L_z .

- a) Quali sono le possibili misure dell'energia, le loro probabilità ed il valor medio?
- b) Determinare i possibili risultati di una misura di L_x e le relative probabilità.
- c) Al tempo $t = 0$ viene acceso un debole campo magnetico nella direzione x , $\vec{B} = B\hat{i}$. Qual è la probabilità che al tempo t una misura di L_x dia risultato zero? (Si trascurino i termini quadratici in B e gli effetti di spin).

(Suggerimento: Gli autostati di H, L^2, L_x , $u_{n\ell m_x}$, con $n = 1, 2$ in termini degli autostati di H, L^2, L_z sono dati da:

$$u_{100} = \psi_{100} ,$$
$$u_{211} = \frac{1}{2} (\psi_{211} + \sqrt{2}\psi_{210} + \psi_{21-1}) , \quad u_{21-1} = \frac{1}{2} (\psi_{211} - \sqrt{2}\psi_{210} + \psi_{21-1}) , \quad u_{210} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{211} - \psi_{21-1}) .)$$