Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

24 febbraio 2022

- Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 10/20.
- È permessa la consultazione di un libro di testo e degli appunti del corso.

1. 6 punti

Una particella di massa m soggetta ad un potenziale armonico in una dimensione, si trova al tempo $t = 0$ in uno stato ψ tale che:

i) misurando l'osservabile $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ si trovano solo i valori 1 e 3,

ii) il valor medio di $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ vale 1/2,

iii) il valor medio di $\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$ è zero.

a) Si determini uno stato normalizzato che soddisfi a queste condizioni.

b) Si calcoli lo scarto quadratico medio $(\Delta x)_t$ all'istante t.

2. 6 punti

Misure dell'hamiltoniana $H_0 = \omega S_x$ per una particella di spin 1/2 danno con certezza il valore dell'energia $\hbar\omega/2$. Determinare le correzioni al primo ordine e al secondo ordine per l'energia fornite da una perturbazione $H_p = \epsilon \frac{\omega}{\hbar} S_+ S_-$. Confrontare il risultato ottenuto con il risultato esatto.

3. 8 punti

Una particella di spin 1/2 vincolata a muoversi su una sfera di raggio unitario è descritta dalla funzione d'onda

$$\psi = A \sin\theta \cos\varphi \left(3\chi_+ + 4e^{i\alpha}\chi_-\right) = -\frac{A}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^1(\theta,\varphi) - Y_1^{-1}(\theta,\varphi)\right)\left(3\chi_+ + 4e^{i\alpha}\chi_-\right)$$

dove A è una costante di normalizzazione, α è una costante reale, $\chi_\pm$ sono gli autostati di S_z, con autovalori $\pm\hbar/2$, rispettivamente.

a) Calcolare la costante di normalizzazione A.

b) Se si effettua una misura di J^2, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, su ψ, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

c) Si effettua poi una misura di L_z su ψ ottenendo $\hbar$ e, immediatamente dopo, una misura di J_z ottenendo $\hbar/2$. Si scriva la funzione d'onda normalizzata del sistema, ψ_1, dopo le due misure.

d) Il sistema con funzione d'onda ψ_1 evolve con un'hamiltoniana:

$$H = \frac{\omega}{\hbar} J^2$$

Si calcolino i valori misurabili di L_z al tempo t e le rispettive probabilità.

(Suggerimento: si considerino le seguenti trasformazioni tra la base L^2, S^2, J^2, J_z e la base L^2, L_z, S^2, S_z:

$$Y_\ell^{M+1/2}(\theta,\varphi)\chi_- = \sqrt{\frac{\ell - M + 1/2}{2\ell+1}}\Psi^M_{J=\ell+1/2} + \sqrt{\frac{\ell + M + 1/2}{2\ell+1}}\Psi^M_{J=\ell-1/2}\ ,$$

$$Y_\ell^{M-1/2}(\theta,\varphi)\chi_+ = \sqrt{\frac{\ell + M + 1/2}{2\ell+1}}\Psi^M_{J=\ell+1/2} - \sqrt{\frac{\ell - M + 1/2}{2\ell+1}}\Psi^M_{J=\ell-1/2}\ .)$$