Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

24 Gennaio 2020

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Una particella libera in moto tridimensionale si trova inizialmente a $t = 0$ nello stato descritto dalla seguente funzione d'onda

$$\psi(r) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\gamma r^2/2}$$

a) Calcolare la densità di probabilità di trovare la particella con impulso $\hbar\vec{k}$ ad ogni istante t. È isotropa?

b) Qual è la probabilità di trovare la particella con energia $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$?

c) Determinare se la particella si trova in un autostato di $\vec{L}^2$ e di L_z per ogni valore di t.

(Suggerimento: si utilizzi l'ntegrale gaussiano:

$$\int d^3 r e^{-ar^2 - i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} e^{-q^2/4a} \text{ .)}$$

2. Un atomo di idrogeno si trova in prossimità di un buco nero di Schwarzschild. A causa della curvatura dello spazio-tempo, l'hamiltoniana totale del sistema è modificata rispetto a quella dell'atomo di idrogeno dalla seguente hamiltoniana

$$H' = kr^2(1 - 3\cos^2\theta)$$

dove k è una costante il cui valore è $k = GMm/(2R^3)$, dove G è la costante di Newton, M la massa del buco nero, m la massa dell'elettrone ed R la distanza tra l'atomo di idrogeno e il centro del buco nero. Si supponga di essere in un regime perturbativo in cui $k << 1$. L'hamiltoniana totale del sistema è data da $H_0 + H'$ dove H_0 è

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}$$

a) Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale di H_0 al primo ordine nella teoria perturbativa.

b) Mostrare che gli elementi di matrice $(u_{2lm}(r,\theta,\phi), H' u_{2l'm'}(r,\theta,\phi)) = 0$ se $m \neq m'$, dove $u_{2lm}(r,\theta,\phi)$ sono le autofunzioni di H_0 corrispondenti ad $n = 2$.

c) Calcolare le correzione all'energia del primo stato eccitato al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

Si ricordi che:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \ , \qquad Y_2^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

Le autofunzioni dell'atomo di idrogeno $u_{n\ell m}$ con $n = 2$ sono:

$$
\begin{aligned}
u_{200} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
u_{211} &= -\frac{1}{4\sqrt{4\pi a_0^3}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin\theta e^{i\varphi} \\
u_{210} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos\theta \\
u_{21-1} &= \frac{1}{4\sqrt{4\pi a_0^3}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin\theta e^{-i\varphi}
\end{aligned}
$$

dove a_0 è il raggio di Bohr.

3. Sia $H_0 = \frac{L^2}{2I} + aL_z$ l'hamiltoniana imperturbata di un rotore tridimensionale, con a costante reale positiva ed I il momento d'inerzia del rotore. Il rotore ha numero quantico $l = 1$.

a) Calcolare autostati ed autovalori di H_0 ed identificare lo stato fondamentale.

All'istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato fondamentale di H_0 e viene perturbato con un campo pulsante nella direzione x attraverso la seguente hamiltoniana

$$H' = bL_x \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta(t - n\delta t)$$

con b costante reale positiva, $N \gg 1$ e δt intervallo di tempo fissato. La pulsazione nella direzione x è sufficientemente debole da poter considerare H' come perturbazione di H_0.

b) Utilizzando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, calcolare la probabilità che a $t = \infty$ il sistema si trovi nel primo stato eccitato di H_0.

c) Sempre attraverso la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, mostrare che l'ampiezza di transizione dallo stato fondamentale di H_0 al primo stato eccitato è massima se $\delta t = 2\pi/a$.

(Si ricordi che:

$$\sum_{n=1}^{N} q^n = q\,\frac{1 - q^N}{1 - q} \;.)$$