

Corso di
MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

25 Giugno 2019

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Ottenere un valore approssimato per l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno assumendo la seguente funzione di prova normalizzata:

$$\psi(r) = \frac{N}{(r + \alpha)^3}, \quad N = \left(\frac{15\alpha^3}{2\pi}\right)^{1/2}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\alpha > 0$ è un parametro variazionale. Confrontare con il risultato esatto e dire qual è l'errore relativo.

2. Si consideri l'hamiltoniana di un oscillatore anarmonico lineare di massa m :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4,$$

dove α e β sono due parametri reali. Determinare, ai primi ordini perturbativi non nulli in α e β , le correzioni ai livelli energetici dell'oscillatore armonico lineare.

Elementi di matrice utili

$$(x^3)_{mn} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{n(n-1)(n-2)}{8}} \delta_{m,n-3} + \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{8}} \delta_{m,n+3} + \sqrt{\frac{9n^3}{8}} \delta_{m,n-1} + \sqrt{\frac{9(n+1)^3}{8}} \delta_{m,n+1} \right),$$

$$(x^4)_{mn} = \frac{3}{4} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 (2n^2 + 2n + 1) \delta_{m,n}.$$

3. Un elettrone si trova a riposo in un campo magnetico oscillante

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \hat{k}$$

dove B_0 e ω sono costanti e \hat{k} è il versore dell'asse- z .

- a) Scrivere la matrice hamiltoniana di questo sistema.

L'elettrone all'istante $t = 0$ si trova nello stato di spin up rispetto alla direzione dell'asse- x .

- b) Trovare la probabilità che all'istante t una misura di S_x dia $-\hbar/2$.

- c) Qual è il minimo valore del campo (B_0) necessario a forzare un'inversione completa di S_x ? A quale istante di tempo questo spin flip avviene per la prima volta?