Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

26 Gennaio 2017

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. In un problema unidimensionale siano dati due operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ che soddisfano alle seguenti due relazioni

$$\hat{B} = \hat{A}\hat{A}^\dagger - I \ , \qquad \text{e} \qquad \hat{B} = \hat{A}^\dagger \hat{A} + I$$

dove I è l' operatore identità.

a) Calcolare i commutatori:

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] \ , \qquad [\hat{B}, \hat{A}] \ , \qquad [\hat{B}, \hat{A}^\dagger] \ .$$

b) Trovare gli autovalori di $\hat{B}$ nell' ipotesi che essi siano tutti non negativi e che l' equazione $\hat{A}u(x) = 0$ ammetta una sola soluzione linearmente indipendente $u = u_0(x)$.

2. Sia

$$\varphi(\vec{p}) = \left(\frac{a^3}{\pi\hbar^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{ap}{\hbar}\right) \ ,$$

con $p = |\vec{p}|$ e $a > 0$, la funzione d' onda normalizzata di una particella in moto tridimensionale.

a) Calcolare $\psi(\vec{r})$, verificarne la normalizzazione e discutere il significato fisico di a.

Possono essere utili i seguenti integrali:

$$\int_0^\infty dt\, te^{-\alpha t} \sin(\beta t) = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \ , \qquad \int_0^\infty dt \frac{t^2}{(a^2 + t^2)^4} = \frac{\pi}{32a^5} \ , \qquad \int_0^\infty dt \frac{t^4}{(a^2 + t^2)^4} = \frac{\pi}{32a^3} \ .$$

3. Un sistema di due particelle di spin 1/2, aventi solo lo spin come grado di libertà, ha un' hamiltoniana data da:

$$H = A\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + B\sigma_{1z} \ .$$

Mostrare che $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ commuta con H e calcolare gli autovalori, gli autovettori ed autospinori simultanei di H e di S_z.