Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

27 Aprile 2021

- Ogni problema vale 15/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Una particella di massa m e carica positiva q in moto unidimensionale è soggetta ad un campo elettrico uniforme dato da $E(x) = \mathcal{E}\left[\theta(x) - \theta(-x)\right]$ dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside.

a) Scrivere l'hamiltoniana del sistema.

b) Si stimi l'energia dello stato fondamentale utilizzando le regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfeld scritte nella forma:

$$\oint p(x)dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) 2\pi\hbar$$

per tenere conto del principio di indeterminazione.

c) Si consideri una funzione di prova del tipo $\psi(x) = Ne^{-\alpha|x|}$ e si stimi l'energia dello stato fondamentale con il metodo variazionale.

d) Si confrontino i due risultati e si dica quale è più vicino al risultato ottenuto dalla soluzione numerica esatta del problema:

$$E \simeq 0.8086 \left(\frac{\hbar^2 q^2 \mathcal{E}^2}{m}\right)^{1/3}$$

2. Un atomo di idrogeno si trova in un autostato $u_{n\ell m}$ dell'hamiltoniana

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}$$

e lo spin dell'elettrone è diretto lungo l'asse x.

a) Si scriva la forma della funzione d'onda completa per l'elettrone e si dica qual è la probabilità di trovare il valore $\hbar/2$ lungo l'asse z eseguendo una misura di spin.

Se l'atomo di idrogeno è soggetto alla perturbazione stazionaria $H_{\mathrm{p}} = \varepsilon x$:

b) Si calcoli la correzione all'energia dello stato fondamentale di H_0 al primo ordine nella teoria perturbativa.

c) Usando le regole di selezione si determini quali elementi di matrice di H_p tra le autofunzioni del primo stato eccitato sono diversi da zero.

d) Calcolare le correzione all'energia del primo stato eccitato al primo ordine della teoria delle perturbazioni, discutendo l'eventuale rimozione della degenerazione.

e) Determinare le combinazioni degli autostati di ordine zero che diagonalizzano simultaneamente le hamiltoniane imperturbata H_0 e di perturbazione H_{p}.

Si ricordi che le autofunzioni dell'atomo di idrogeno $u_{n\ell m}$ con $n = 2$ sono:

$$
\begin{aligned}
u_{200} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
u_{211} &= -\frac{1}{4\sqrt{4\pi a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin\theta e^{i\varphi} \\
u_{210} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos\theta \\
u_{21-1} &= \frac{1}{4\sqrt{4\pi a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin\theta e^{-i\varphi}
\end{aligned}
$$

dove a_0 è il raggio di Bohr.