Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

Meccanica Quantistica

Prova Scritta

27 gennaio 2021

- Ogni problema vale 15/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Un oscillatore armonico unidimensionale all'istante iniziale ($t = 0$) è in uno stato descritto dalla funzione d' onda

$$\psi(x,0) = N \sum_{n=0}^{\infty} c^n u_n(x) \ ,$$

dove le $u_n(x)$ sono le autofunzioni dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico e c un parametro complesso.

a) Calcolare la costante di normalizzazione N.

b) Trovare la funzione d'onda del sistema all'istante $t > 0$.

c) Calcolare la probabilità di trovare il sistema nello stato iniziale ad un tempo $t > 0$.

d) Calcolare il valor medio dell'energia.

2. Si consideri un elettrone legato in un atomo di idrogeno sotto l'influenza di un campo magnetico diretto lungo l'asse z, $\vec{B} = B\hat{k}$. Si trascuri lo spin dell'elettrone. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = H_0 - \omega L_z \ ,$$

dove $\omega = |e|B/2mc$. Gli autostati $u_{n,\ell,m}$ e gli autovalori $E_n^{(0)}$ dell'hamiltoniana imperturbata dell'atomo di idrogeno H_0 devono essere considerati noti. Si assuma che inizialmente (a $t = 0$) il sistema sia nello stato:

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_{2,1,-1} - u_{2,1,1} \right) \ .$$

a) Per ognuno dei seguenti stati, calcolare la probabilità di trovare il sistema all'istante $t > 0$, nello stato:

$$|2p_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_{2,1,-1} - u_{2,1,1} \right) \ ,$$
$$|2p_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_{2,1,-1} + u_{2,1,1} \right) \ ,$$
$$|2p_z\rangle = u_{2,1,0} \ .$$

Quando diventano uguali a 1 queste probabilità?

b) Calcolare il valore medio del momento di dipolo magnetico associato al momento angolare, al tempo t.

c) Si consideri lo stato $|\hat{n}\rangle$ definito da:

$$(\hat{n} \cdot \vec{L})|\hat{n}\rangle = \hbar|\hat{n}\rangle \ , \qquad L^2|\hat{n}\rangle = 2\hbar^2|\hat{n}\rangle \ .$$

Quindi $|\hat{n}\rangle$ è un autostato del momento angolare con numero quantico $\ell = 1$ e autovalore della componente del momento angolare lungo la direzione $\hat{n}$ uguale a $+\hbar$. Calcolare, all'istante $t > 0$, la probabilità di trovare il sistema in questo stato e mostrare che è una funzione periodica del tempo. Con quale periodo? Quali sono i valori massimi e minimi di questa probabilità? Per semplicità supporre che la direzione $\hat{n}$ sia nel piano xy, $\hat{n} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}$.