Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

28 Febbraio 2020

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo.

1. Un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω e massa m è inizialmente (a $t = 0$) in uno stato corrispondente alla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\gamma x^2/2}$$

dove $\gamma \neq m\omega/\hbar$ è un parametro positivo.

a) Calcolare i valori di aspettazione delle osservabili

$$x, \quad p, \quad xp + px, \quad x^2, \quad p^2$$

all' istante $t = 0$.

b) Calcolare $\langle x^2 \rangle_t$ e $\langle p^2 \rangle_t$, per $t > 0$.

c) Scrivere il prodotto $(\Delta x)_t (\Delta p)_t$ e verificare che sia sempre maggiore di $\hbar/2$. Mostrare che è una funzione periodica del tempo, con quale periodo T?

d) Come diventa $(\Delta x)_t (\Delta p)_t$ se $\gamma = m\omega/\hbar$?

2. Si consideri un sistema unidimensionale costituito da una particella di massa m che si trova su un anello di raggio R. L'hamiltoniana del sistema è $H = H_0 + H'$, dove l'hamiltoniana imperturbata H_0 e l'hamiltoniana di perturbazione H' sono date rispettivamente dalle seguenti espressioni

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(\frac{1}{i}\frac{d}{d\theta} - F\right)^2, \qquad H' = V_0 \cos\theta.$$

F e V_0 sono constanti positive e $\theta \in [0, 2\pi]$ è la coordinata angolare della particella.

a) Mostrare che le autofunzioni dell'hamiltoniana imperturbata H_0 sono date da

$$\psi_n^{(0)}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}, \qquad n = 0, \pm 1 \pm 2, \cdots$$

con $\psi_n^{(0)}(\theta) = \psi_n^{(0)}(\theta + 2\pi)$ e calcolare gli autovalori $E_n^{(0)}$ di H_0.

b) Mostrare che per $0 < F < 1/2$ lo stato fondamentale di H_0 è non degenere mentre per $F = 1/2$ è doppiamente degenere.

c) Calcolare, al primo ordine perturbativo, la correzione all'energia dello stato fondamentale di H_0 nel caso $0 < F < 1/2$.

d) Calcolare, al primo ordine perturbativo, le correzioni all'energia dello stato fondamentale di H_0 nel caso $F = 1/2$, e i corrispondenti autostati imperturbati.

3. Un sistema di due particelle con spin rispettivamente $s_1 = 3/2$ e $s_2 = 1/2$ è descritto dall'hamiltoniana $H = \alpha\, \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$, con α costante positiva. Il sistema si trova all'istante iniziale $t = 0$ nel seguente autostato di $\mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2, S_{1z}, S_{2z}$

$$\left|s_1 m_{s_1}; s_2 m_{s_2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

a) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$.

b) Calcolare la probabilità di trovare il sistema nello stato $\left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\rangle$.