Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

4 maggio 2022

- Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 10/20.
- È permessa la consultazione di un libro di testo e degli appunti del corso.

1. **6 punti**

Due particelle identiche di massa m e spin $s_1 = s_2 = 1/2$ sono vincolate a muoversi in una dimensione in un intervallo $[0, a]$ e sono soggette all'interazione $H_s = \lambda \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ con $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

a) Determinare autovalori, autofunzioni e relative degenerazioni dei primi tre livelli energetici tenendo conto dell'identità e della statistica delle particelle, con $0 < \lambda \ll \pi^2/(ma^2)$.

2. **8 punti**

Si determinino uno o più set di operatori mutuamente commutanti con le seguenti hamiltoniane per una particella di massa m e spin $1/2$

1)

$$H = \frac{\mathcal{E}}{\hbar^2}\left(L_x^2 + L_y^2 + S_x^2 + S_y^2\right) \ ,$$

2)

$$H = \frac{\mathcal{E}}{\hbar^2}\left(L_x^2 + L_y^2 + S_x^2 + S_y^2 - 2L_zS_z\right) \ ,$$

3)

$$H = \frac{\mathcal{E}}{\hbar^2}\left(L_x^2 + L_y^2 + S_x^2 + S_y^2 - 2L_zS_z + 2\vec{L}\cdot\vec{S}\right) \ .$$

a) Se la particella ha numero quantico del momento angolare orbitale $\ell = 1$, si scrivano autostati e autovalori dell'energia con la degenerazione dei livelli nei vari casi, discutendo i risultati.

b) Se la dinamica della particella è regolata dall'hamiltoniana del punto 3), e lo stato iniziale della particella è $|0, +1/2\rangle$ nella base $|\ell_z, s_z\rangle$, si determini dopo quanto tempo risulta massima la probabilità di spin-flip, ovvero di misurare $s_z = -1/2$.

(Suggerimento: gli stati $|\ell_z, s_z\rangle = |0, 1/2\rangle$ e $|\ell_z, s_z\rangle = |1, -1/2\rangle$, nella base L^2, S^2, J^2, J_z sono dati da:

$$|0, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_{j=3/2}^{j_z=1/2} - \sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_{j=1/2}^{j_z=1/2} \ , \qquad |1, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\Psi_{j=3/2}^{j_z=1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_{j=1/2}^{j_z=1/2} \ .)$$

3. **6 punti**

Si consideri un atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale che dopo il tempo $t = 0$ sia soggetto ad un campo elettrico uniforme ma dipendente dal tempo $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-t/\tau}$. Trattando il campo elettrico come una perturbazione, calcolare al primo ordine la probabilità $P_{1s\to 2p}(t)$ che al tempo t l'atomo si trovi nello stato eccitato $(n = 2, \ell = 1, m = 0)$. Come diventa $P_{1s\to 2p}(t)$ per $t \gg \tau$?

(Suggerimento: si ricordi che:

$$u_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}} \ , \qquad u_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos\theta . \ )$$