

Corso di
MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

5 novembre 2020

- È permessa la consultazione di un solo libro di testo.

1. Si consideri la seguente Hamiltoniana di una particella di massa m

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c(x^2 + 2xb + b^2) \quad (1)$$

dove c e b sono costanti positive.

- a) Calcolare gli autostati e autovalori esatti di H .

Si considerino i termini dipendenti da b in (1) come perturbativi. L'Hamiltoniana imperturbata si ottiene pertanto ponendo $b = 0$ in (1).

- b) Calcolare gli autostati e autovalori del sistema imperturbato.
c) Calcolare le correzioni agli autovalori del sistema imperturbato al primo ordine della teoria delle perturbazioni.
d) Calcolare le correzioni agli autovalori del sistema imperturbato al secondo ordine della teoria delle perturbazioni.

2. Si consideri un operatore \vec{V} le cui componenti, V_i , $i = x, y, z$, soddisfano alla relazioni di commutazione

$$[V_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} V_k \quad (2)$$

dove \vec{L} è l'operatore momento angolare. \vec{V} è, per definizione, un *operatore vettoriale*.

- a) Per gli operatori

$$V'_i = e^{i\phi L_x/\hbar} V_i e^{-i\phi L_x/\hbar}, \quad i = x, y, z$$

si dimostri che valgono le seguenti equazioni differenziali

$$\frac{dV'_x}{d\phi} = 0, \quad \frac{dV'_y}{d\phi} = -V'_z, \quad \frac{dV'_z}{d\phi} = V'_y. \quad (3)$$

- b) Risolvendo le equazioni differenziali (3) provare che l'operatore $e^{i\phi L_x/\hbar}$ è un operatore di rotazione che genera una rotazione attorno all'asse- x di un angolo ϕ mostrando che

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = e^{i\phi L_x/\hbar} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} e^{-i\phi L_x/\hbar} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}.$$

- c) Provare che

$$e^{-i\pi L_x/\hbar} Y_\ell^m = Y_\ell^{-m}$$

dove le Y_ℓ^m sono le armoniche sferiche.

- d) Si consideri ora un elettrone dotato di spin. Come si modifica il suo stato ψ se si ruota prima di $-\pi$ attorno all'asse- z , poi di $-\pi$ attorno all'asse- y e infine di $-\pi$ intorno all'asse- x ?

(Suggerimento, si utilizzino le relazioni:

$$\begin{aligned}e^{-i\frac{\pi}{2}L_x/\hbar}e^{-i\pi L_y/\hbar}e^{i\frac{\pi}{2}L_x/\hbar} &= e^{-i\pi L_z/\hbar}, \\e^{-i\pi L_z/\hbar}\psi &= e^{i\pi L_z/\hbar}e^{-i2\pi L_z/\hbar}\psi = e^{i\pi L_z/\hbar}\psi, \quad \forall\psi, \\e^{-i\pi L_z/\hbar}e^{-i\frac{\pi}{2}L_x/\hbar}e^{i\pi L_z/\hbar} &= e^{i\frac{\pi}{2}L_x/\hbar}.\end{aligned}$$