

Prova Scritta

7 febbraio 2018

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Lo stato normalizzato di una particella (non necessariamente libera) in moto unidimensionale è dato, ad un certo istante, da

$$\psi(x) = N \exp(-a^2 x^2) , \quad \left(N = \left(\frac{2a^2}{\pi} \right)^{1/4} \right) ,$$

con a costante reale positiva.

Calcolare in questo stato lo scarto quadratico medio della quantità di moto, $(\Delta p)^2$, svolgendo gli integrali necessari. Mostrare poi che il risultato poteva essere dato senza nessun calcolo, ma solo applicando teoremi ben noti.

2. \vec{J} è il momento angolare totale di un generico sistema quantistico. Sia φ_j^m l'autostato di J^2 e di J_z corrispondente agli autovalori $j(j+1)\hbar^2$ e $m\hbar$, rispettivamente.

Calcolare in questo stato il valor medio e lo scarto quadratico medio dell'operatore $J_n \equiv \vec{J} \cdot \hat{n}$, componente di \vec{J} lungo un versore \hat{n} di angoli polari α e β : $\hat{n} = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha)$. (Suggerimento, si consiglia di esprimere J_n in termini di J_+ , J_- e J_z).

3. Una particella di massa m , in moto nel piano (x, y) , è sottoposta all'azione di una buca di potenziale bidimensionale circolare di profondità infinita e di raggio a

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{per } r \leq a \\ +\infty, & \text{per } r > a \end{cases} , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Si calcoli con il metodo variazionale il valore approssimato dell'energia dello stato fondamentale, E_0 , usando come funzione di prova normalizzata (e non dipendente da alcun parametro variazionale) una delle due seguenti funzioni:

$$\psi(r) = A(a - r) , \quad \left(A = \sqrt{\frac{6}{\pi a^4}} \right) ,$$

oppure

$$\varphi(r) = B \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right) , \quad \left(B = \sqrt{\frac{2\pi}{(\pi^2 - 4)a^2}} \right) ,$$

($r \leq a$; naturalmente $\psi(r) = \varphi(r) = 0$ per $r > a$). Confrontare con il risultato esatto, dato da $E_0 = 2.89 \frac{\hbar^2}{ma^2}$, e dire quale delle due funzioni di prova dà risultati migliori e quali sono gli errori relativi.