

Prova Scritta

9 Giugno 2021

- Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 10/20.
- È permessa la consultazione di un libro di testo e degli appunti del corso.

1. 7 punti

Si considerino due particelle identiche di spin 0 descritte dalla seguente hamiltoniana:

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2) ,$$

- a) Si determinino autovalori e autofunzioni dell'hamiltoniana H_0 e si discuta la degenerazione dei primi tre livelli.

Si introduca ora una perturbazione della forma $H_p = \varepsilon m\omega^2 x_1 x_2$, dove ε è un parametro piccolo.

- b) Si calcoli lo spostamento dello stato fondamentale e del primo livello eccitato al primo ordine in teoria delle perturbazioni.
- c) Si calcoli lo spostamento dello stato fondamentale al secondo ordine della teoria delle perturbazioni
- d) Si risolva esattamente il problema di trovare gli autovalori e la loro degenerazione per l'hamiltoniana $H = H_0 + H_p$, sempre per il caso di due particelle identiche di spin 0.
- e) Si confrontino i risultati esatti con quelli ottenuti perturbativamente.

2. 5 punti

Si consideri un elettrone sotto la simultanea influenza di un campo elettrico uniforme, \vec{E} , e di un campo magnetico uniforme, \vec{B} , con direzioni generiche, e si calcolino i seguenti elementi di matrice nella base di autostati di L^2 , L_z , S^2 e S_z :

$$\left(u_{\ell m s m_s}, H_M u_{\ell m s m'_s} \right) , \quad \left(u_{\ell m s m_s}, H_E u_{\ell m s m'_s} \right)$$

dove H_M è l'hamiltoniana Zeeman:

$$H_M = -\frac{e}{2m_e c} \vec{B} \cdot (\vec{L} + 2\vec{S})$$

e H_E è data dall'interazione di dipolo elettrico:

$$H_E = -e\vec{E} \cdot \vec{r}$$

dove $e = -|e|$.

3. 8 punti

Si consideri una regione infinita in cui sia presente un campo elettrico diretto lungo l'asse y , $\vec{E} = E\hat{j}$. Un elettrone caratterizzato dalla funzione d'onda localizzata

$$\psi = N e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - \alpha r^2/2} , \quad \alpha > 0 ,$$

con $\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j}$, entra nella regione all'istante $t = 0$.

- a) Trovare i valori medi degli operatori di posizione \vec{r} e dell'impulso \vec{p} all'istante $t = 0$ e ad ogni istante successivo durante la presenza dell'elettrone nella regione.
- b) Si calcoli il tempo T al quale il valor medio della componente della posizione nella direzione del campo coincide con il suo valore iniziale e si scrivano i valori medi di \vec{r} e \vec{p} all'istante T .
- c) Calcolare l'indeterminazione sull'impulso \vec{p} e mostrare che è indipendente dal campo elettrico.
- d) Calcolare le dimensioni del pacchetto d'onda ad ogni istante $0 < t \leq T$ e mostrare che è indipendente dal campo elettrico.