

Corso di
MECCANICA QUANTISTICA

Secondo compito d'esonero

3 giugno 2021

- Ogni problema vale 15/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere un punteggio non inferiore a 15/30.
- È permessa la consultazione di un libro di testo e degli appunti del corso.

1. L'hamiltoniana di un atomo di elio si può scrivere nella forma

$$H = H_0 + H_{12}$$

dove H_{12} è il termine di interazione coulombiana tra gli elettroni. Tenendo conto dello spin degli elettroni e trattando H_{12} come una perturbazione:

- a) si considerino le correzioni $\Delta_{12}^{(\pm)}$ ai due autostati degeneri $1s2s$ (paraelio e ortoelio) di H_0 dovuta alla repulsione tra gli elettroni e se ne calcoli lo splitting $\Delta = \Delta_{12}^{(+)} - \Delta_{12}^{(-)}$.
- b) Si consideri poi un atomo di elio all'istante $t = 0$ con un elettrone in uno stato $1s$ con spin up e un elettrone nello stato $2s$ con spin down e si esprima l'autofunzione in termini di quelle corrispondenti di paraelio e ortoelio.
- c) Scrivere lo stato dell'atomo ad un istante successivo $t > 0$. È possibile che ad un qualche istante successivo T gli spin si siano rovesciati? Calcolare questo tempo T e discutere la validità di questo calcolo.

(Si ricordi il seguente integrale:

$$\int d\Omega_1 d\Omega_2 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = 4\pi \int d\Omega \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}} = \frac{8\pi^2}{r_1 r_2} (r_1 + r_2 - |r_1 - r_2|) \ .)$$

2. Si consideri un sistema di tre elettroni. Trattando gli elettroni 1 e 2 come un sottosistema e combinando lo spin totale di 1 e 2, \vec{S}_{12} , con quello dell'elettrone 3:

- a) si trovino gli autovalori possibili dello spin totale dei tre elettroni, \vec{S} .
- b) Trovare un set di autostati degli operatori di spin totale S^2 e S_z .
- c) Ignorando i gradi di libertà spaziali, assumere che l'hamiltoniana approssimata del sistema sia:

$$H = \alpha (S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{2x}S_{3x} + S_{2y}S_{3y} + S_{1x}S_{3x} + S_{1y}S_{3y})$$

e trovare i possibili autovalori dell'energia sugli stati trovati in b).