Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

24 Febbraio 2016

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. L' hamiltoniana di due particelle identiche di massa m e spin zero, in moto unidimensionale, è data da

$$H = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + m\lambda x_1 x_2$$

(oscillatori armonici accoppiati; x_1 e x_2 sono le coordinate sull' asse x delle due particelle; λ costante reale tale che $0 < \lambda < \omega^2$).

a) Scrivere l' hamiltoniana in coordinate baricentriche: $x = x_1 - x_2 =$ coordinata relativa e $X = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $=$ coordinata del baricentro (è conveniente anche introdurre i simboli $\mu = m/2 =$ massa ridotta e $M = 2m =$ massa totale).

b) Mostrare che questa trasformazione disaccoppia i due oscillatori e dire quali sono gli autovalori e le autofunzioni di H.

2. Per una particella di spin 1/2 siano, come di consueto, $\vec{L}$ e $\vec{S}$ i momenti angolari orbitale e di spin, rispettivamente.

a) Mostrare che i seguenti tre operatori: L^2, $\vec{L}\cdot\vec{S}$ e $J_z = L_z + S_z$ ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} =$ momento angolare totale) commutano tra di loro.

b) Dire inoltre quante e quali sono le autofunzioni comuni ai tre operatori dati e che corrispondono agli autovalori $6\hbar^2$ per L^2 e $3\hbar/2$ per J_z. A quali autovalori per $\vec{L}\cdot\vec{S}$ esse corrispondono?

3. Calcolare, nello stato fondamentale dell' atomo di idrogeno, il valor medio di $T = \dfrac{p^2}{2m}$ e di $V = -\dfrac{e^2}{r}$ e mostrare che valgono le relazioni:

$$\langle V\rangle = -2\langle T\rangle = 2E_1 \qquad \text{(teorema del viriale)}$$

dove E_1 è l'energia dello stato fondamentale dell' atomo di idrogeno.
Si ricordi che l' autofunzione normalizzata dello stato fondamentale dell' atomo di idrogeno (trascurando lo spin) è data da:

$$u_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}$$

dove $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{me^2}$ è il raggio di Bohr.