Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Prova Scritta

20 Gennaio 2016

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Siano date le due matrici seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Ovviamente A ha uno spettro degenere di autovalori. Lo stesso è vero per B?

b) Mostrare che A e B commutano e trovare gli autovettori simultanei di A e B. Ogni degenerazione è in tal caso eliminata?

2. L'hamiltoniana di una particella in moto unidimensionale è data, come di consueto, da $H = p^2/2m + V(x)$. Inoltre E_n e u_n indicano, rispettivamente, i relativi autovalori e autofunzioni (si suppone che lo spettro sia discreto e non degenere, per semplicità).
Si dimostri la seguente identità:

$$\sum_{n'} \left|(u_n, x\, u_{n'})\right|^2 (E_{n'} - E_n) = \frac{\hbar^2}{2m} \ .$$

3. La funzione d' onda di una particella di massa μ, soggetta ad un potenziale centrale $V(r)$ (con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), è data da

$$\psi(\vec{r}) = x f(r)$$

a) Quali sono i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di L^2? Idem per una misura di L_z.

b) Supponiamo che $\psi(\vec{r})$ sia un' autofunzione dell' energia con $f(r)$ della forma

$$f(r) = N \exp(-b^2 r^2)$$

dove N è una costante di normalizzazione (da determinare) e $b > 0$ una costante con le dimensioni dell' inverso di una lunghezza. Trovare la forma del potenziale e l' autovalore dell' energia.