Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

Meccanica Quantistica

Prof. Gianluca Grignani

Prova Scritta

20 Giugno, 2013

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Lo stato di un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω è dato, all' istante $t = 0$, da una sovrapposizione dei due autostati dell' Hamiltoniana con energia più bassa. In tale stato il valor medio dell' energia è uguale a $\hbar\omega$. Sapendo inoltre che la densità di corrente nel punto $x = 0$ è nulla all' istante $t = 0$ ed è crescente con t, scrivere l' espressione della funzione d' onda all' istante iniziale e calcolare il valore della densità di corrente nel punto $x = 0$ al tempo $t = \pi/(2\omega)$.

2. Siano $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{S}$ e $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ il momento angolare orbitale, di spin e totale di una particella di spin 1/2. La particella si trovi in uno stato $P_{1/2}$, cioè in un autostato di L^2 e di J^2 corrispondente agli autovalori, rispettivamente, $\hbar^2\ell(\ell + 1)$ e $\hbar^2 j(j + 1)$, con $\ell = 1$ e $j = \ell - 1/2 = 1/2$.

a) Mostrare che la più generale dipendenza angolare e di spin di un tale stato è della forma

$$\Psi_{\ell=1,j=1/2}(\theta, \varphi) = (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})v \tag{1}$$

dove σ_i $(i = 1, 2, 3)$ sono le matrici di Pauli, $\hat{n} = \vec{r}/r$ e

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \ ,$$

è un generico spinore con α e β costanti complesse.

b) Dire quale deve essere la norma dello spinore v se lo stato (1) è normalizzato all' unità.

c) Trovare la forma esplicita dello spinore v nei due casi in cui (1) è anche autostato di J_z corrispondente ai due autovalori $m_j\hbar = \pm\hbar/2$. Trovare, cioè, l'espressione esplicita dei due seguenti autospinori di L^2, J^2 e J_z

$$\Psi^{m=\pm 1/2}_{\ell=1,j=1/2}(\theta, \varphi)$$

e vedere che sono in accordo con formule generali ben note. (Ricordare che: $[L_i, n_k] = i\hbar n_r$ (da cui $[L^2, n_i] = 2\hbar^2 n_i + 2i\hbar(n_k L_r - n_r L_k)$), (i, k, r) è una permutazione pari degli indici $(1, 2, 3)$ e $[J_i, (\vec{\sigma} \cdot \hat{n})] = 0$ (dire da quali principi generali discende la validità di questi commutatori senza valutarli esplicitamente). Notare, inoltre, che ovviamente $L_i v = 0$. Infine ricordare l'identità $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ dove $\vec{A}$ e $\vec{B}$ commutano con $\vec{\sigma}$ ma non necessariamente tra loro).

3. L'Hamiltoniana di un elettrone si può scrivere, trascurando lo spin, come la somma di un' Hamiltoniana imperturbata, della forma valida per gli atomi idrogenoidi e di una perturbazione del tipo potenziale Coulombiano schermato, come segue

$$
\begin{aligned}
H &= H_0 + H_p \ , \\
H_0 &= \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \ , \\
H_p &= -\varepsilon \frac{A}{r}\, e^{-bZr/a_0} \ , \qquad \left(a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \right) \ ,
\end{aligned}
$$

dove ε e b sono due costanti positive adimensionali (inoltre $\varepsilon \ll 1$), A è una costante positiva con dimensioni di un' energia per una lunghezza e a_0 è il raggio di Bohr.

Facendo uso della teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo, calcolare le correzioni al primo ordine in ε, ai primi due livelli imperturbati E_1 ed E_2 (corrispondenti cioè ai due valori del numero quantico totale $n = 1$ e $n = 2$). Dire inoltre in quanti livelli si separa il generico stato imperturbato E_n per effetto della perturbazione.

Formule utili

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty dx\, e^{-ax} x^n = \frac{n!}{a^{n+1}} \ , \qquad (a > 0,\ n \geq 1) \ , \\
&\chi_{10} = \sqrt{\frac{Z}{a_0}}\, 2\rho\, e^{-\rho} \ , \\
&\chi_{20} = \sqrt{\frac{Z}{8a_0}}\, \rho(2-\rho)\, e^{-\rho/2} \ , \\
&\chi_{21} = \sqrt{\frac{Z}{24a_0}}\, \rho^2\, e^{-\rho/2} \ , \qquad \left(\rho = \frac{Zr}{a_0} \right) \ .
\end{aligned}
$$