

Prova Scritta

23 luglio 2015

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatori portatili.

1. Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e carica elettrica e è sottoposto ad un campo elettrico di intensità \mathcal{E} . L'hamiltoniana sarà pertanto

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + e\mathcal{E}x.$$

a) Calcolare gli autovalori e le autofunzioni di H .

b) Se al tempo $t = 0$ la funzione d'onda è

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} e^{-\alpha^2 x^2 / 2} \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right),$$

calcolare la probabilità di ottenere l'autovalore più basso di H effettuando una misura dell'energia ad un tempo t qualsiasi.

c) Calcolare il valor medio dell'energia.

2. Un atomo di idrogeno si trova nello stato descritto dalla seguente funzione d'onda normalizzata:

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(e^{-r/a_0} + \frac{x - iy}{8a_0} e^{-r/(2a_0)} \right),$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $a_0 = \hbar^2 / (\mu e^2)$ è il raggio di Bohr.

a) Calcolare il valor medio dell'energia.

b) Calcolare il valor medio di r .

3. Per una particella di spin 1 scrivere l'autostato di S_x , corrispondente all'autovalore 0, come sovrapposizione degli autostati di S_z (si consiglia di esprimere S_x in termini degli operatori di innalzamento e di abbassamento S_+ e S_-).

La particella è posta in un campo magnetico \vec{B} uniforme e costante diretto lungo l'asse z , $\vec{B} = B \hat{z}$, così che l'hamiltoniana efficace che determina l'evoluzione dello stato di spin è data da $H = \mu B S_z$. Per $t = 0$ la particella si trova nello stato $S_x = 0$. Determinare in funzione del tempo l'espressione dello stato di spin e la probabilità di trovare $S_x = 0$.