Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

Meccanica Quantistica

Prof. Gianluca Grignani

Prova Scritta

23 Luglio, 2014

- Ogni problema vale 10/30. Per l'ammissione all'orale è necessario ottenere la sufficienza, 18/30.
- È permessa la consultazione dei testi e degli appunti del corso. È ammesso l'uso di calcolatrici.

1. Si considerino le tre matrici hermitiane

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

a) Si mostri che soddisfano alle seguenti relazioni di commutazione (le stesse che per le componenti di un momento angolare):

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \ , \quad \text{e cicliche}$$

b) Si trovino gli autovalori e autovettori di S_z.

c) Con i risultati del punto b) si costruisca la generica matrice unitaria, U, che diagonalizza S_z (cioè $U^\dagger S_z U = (S'_z)_{\text{diagonale}}$).

Infine, determinare U in modo da trovare per le matrici S'_x, S'_y e S'_z, trasformate di S_x, S_y e S_z, le espressioni, ben note dal corso, per le matrici di spin 1.

2. Una particella di massa m è vincolata a restare sul segmento $0 \leq x \leq L$ dell asse-x, buca infinita di potenziale:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ +\infty & \text{se } x < 0 \text{ e } x > L. \end{cases}$$

Il suo stato è descritto, all' istante $t = 0$, dalla funzione d' onda normalizzata

$$\psi(x, 0) = \frac{2}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Calcolare, in funzione del tempo, la densità di probabilità di presenza nel punto di mezzo del segmento $x = \frac{L}{2}$.

3. L' hamiltoniana dell' atomo di idrogeno, in approssimazione puramente coulombiana e non relativistica, è data da:

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}$$

dove μ, se si considera la massa del protone infinitamente grande, è la massa dell' elettrone. Non tenendo conto dello spin e usando la teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo, si calcolino al primo ordine perturbativo, le correzioni al livello fondamentale e al primo livello eccitato dell' energia causate dalla seguente perturbazione

$$H_p = \mu_B \left(\vec{B} \cdot \vec{L}\right) \frac{(x^2 + y^2)}{\hbar a_0^2}$$

dove $\vec{L}$= momento angolare orbitale, $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2\mu c}$ = magnetone di Bohr, $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ =raggio di Bohr e, inoltre, il campo magnetico $\vec{B}$, costante e uniforme, è diretto lungo l' asse z. Si dica, infine, a quale condizione deve soddisfare l' intensità del campo B affinché la trattazione sia applicabile.