Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

MECCANICA QUANTISTICA

Potenza assorbita da un oscillatore

Si consideri un'onda monocromatica polarizzata linearmente che incida su un elettrone e di campo elettrico

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{-i\omega t} \ . \tag{1}$$

L' equazione del moto di un elettrone non relativistico legato elasticamente (con pulsazione ω_0), soggetto all' azione del campo elettrico (1) e che emetta radiazione secondo la legge di Larmor è data da

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}_0 \, e^{-i\omega t} \ , \tag{2}$$

dove

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^2}$$

è una costante che tiene conto dello smorzamento (damping) dovuto all' emissione di radiazione. Nell' equazione della forza compare solo il campo elettrico perché si assume moto non relativistico.

Ponendo

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \, e^{-i\omega t} \equiv \vec{s}_0 \, e^{-i(\omega t - \varphi)} \ ,$$

abbiamo

$$\vec{r}_0 = -\frac{e}{m}\frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \vec{s}_0 \, e^{i\varphi} \ ,$$

con $\vec{s}_0$ e φ reali e dati da

$$\vec{s}_0 = \frac{e}{m}\frac{\vec{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \ , \qquad \tan\varphi = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \ .$$

Il valor medio nel tempo della potenza fornita dalla forza applicata all' elettrone è data da

$$\begin{aligned}
&P_{\text{ass}}^{(\omega)} = -\langle e\vec{E}\cdot\dot{\vec{r}}\rangle = m\langle\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}\rangle + m\gamma\langle\dot{\vec{r}}^2\rangle + m\omega_0^2\langle\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\rangle \\
&= m\omega^3 s_0^2\langle\sin(\omega t - \varphi)\cos(\omega t - \varphi)\rangle + m\gamma\omega^2 s_0^2\langle\sin^2(\omega t - \varphi)\rangle - m\omega_0^2\omega s_0^2\langle\sin(\omega t - \varphi)\cos(\omega t - \varphi)\rangle \\
&\simeq \frac{1}{2}m\gamma\omega^2 s_0^2 \ .
\end{aligned}$$

Se $I(\omega)$ e $u(\omega)$ sono l' intensità della radiazione e la relativa densità di energia, si ha

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} \equiv cu(\omega) = \frac{cE_0^2(\omega)}{8\pi}$$

e possiamo scrivere

$$P_{\text{ass}}^{(\omega)} = \frac{\gamma e^2}{2m}\frac{E_0^2(\omega)\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} = \frac{4\pi\gamma e^2}{m}\frac{u(\omega)\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \ .$$

Per radiazione non monocromatica si deve sostituire al contributo alla densità di energia della singola onda monocromatica, la denistà di energia di un intervallo infinitesimo di frequenze $d\omega$

$$u(\omega) \to u_\omega(\omega) d\omega \ ,$$

dove $u_\omega(\omega)$ è la densità spettrale dell' onda. Si può ora integrare su ω tenendo presente che, a causa del denominatore, si ha un picco molto stretto (di larghezza $\sim \gamma$) intorno ad $\omega = \omega_0$ e si può sostituire, dove possibile, ω_0 ad ω. Inoltre $\omega_0^2 - \omega^2 \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega) = -2\omega_0 \xi$ con $\xi = \omega - \omega_0$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} P_{\text{ass}} &= \frac{4\pi\gamma e^2}{m} \int_0^\infty d\omega \frac{u_\omega(\omega)\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \simeq \frac{4\pi\gamma e^2}{m} \frac{u_\omega(\omega_0)\omega_0^2}{4\omega_0^2} \int_{-\omega_0}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + \gamma^2/4} \\ &\simeq \frac{4\pi\gamma e^2}{m} \frac{u_\omega(\omega_0)\omega_0^2}{4\omega_0^2} \frac{2}{\gamma} \int_{-\frac{2\omega_0}{\gamma}}^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + 1} = \frac{2\pi e^2}{m} u_\omega(\omega_0) \int_{-\infty}^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + 1} = \frac{2\pi^2 e^2}{m} u_\omega(\omega_0) \ . \end{aligned}$$

Per esprimere P_{ass} in termini di $u_\nu(\nu)$ notiamo che

$$\int_{-\infty}^\infty u_\omega(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^\infty u_\nu(\nu) d\nu \ ,$$

quindi $2\pi u_\omega(\omega) = u_\nu(\nu)$. Allora

$$P_{\text{ass}} = \frac{\pi e^2}{m} u_\nu(\nu_0) \ . \tag{3}$$

L' equazione (3) è un risultato molto generale, indipendente da γ, per la potenza media trasferita ad un oscillatore non relativistico da un campo elettromagnetico esterno. Questa formula dà l'assorbimento di un elettrone legato elasticamente e possedente tre gradi di libertà spaziali. Nella teoria della radiazione nera, l' oscillatore è lineare (supponiamo che oscilli lungo l' asse x). Quindi viene eccitato soltanto dalla componente x del campo elettrico; in un campo di radiazione isotropo esso assorbe solo la terza parte di (3), cioè

$$P_{\text{ass}} = \frac{\pi e^2}{3m} u_\nu(\nu_0) \ .$$