Università degli Studi di Perugia - Corso di Laurea Triennale in Fisica

Corso di

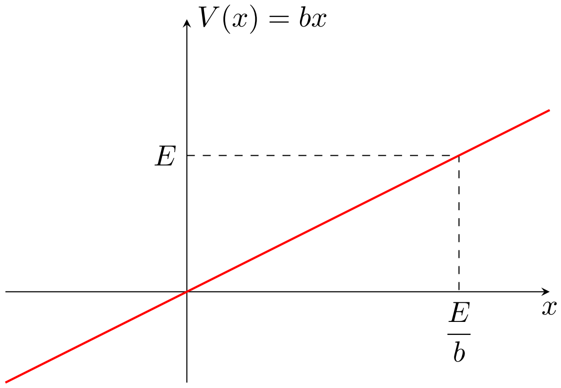
MECCANICA QUANTISTICA

Moto in un campo uniforme

Consideriamo una particella in moto in un campo esterno uniforme, ad esempio un campo elettrico costante che agisce su una particella di carica e. Prendiamo la direzione del campo come quella dell'asse x. Sia F la forza che il campo esercita sulla particella, l'energia potenziale della particella in questo campo è della forma $V(x) = -Fx+$costante. Scegliendo la costante in modo che $V(0) = 0$ si ottiene un'energia potenziale del tipo

$$V(x) = bx \ , \qquad b > 0 \ , \tag{1}$$

che genera una forza costante $F = -b$, diretta nel verso negativo delle x.



Se l'energia è E, classicamente è permessa solo la zona $x < E/b$. Per $x > E/b$, zona classicamente proibita, anche quantisticamente la probabilità di trovare la particella è minima.

L'equazione di Schrödinger stazionaria,

$$\hat{H}\psi = E\psi \ , \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + bx\psi = E\psi \ ,$$

si può scrivere nella forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + Fx)\,\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - bx)\,\psi = 0 \ . \tag{2}$$

Lo spettro è continuo, gli autovalori sono non degeneri, il moto è finito in direzione $x \to +\infty$ ed infinito in direzione $x \to -\infty$; per $x \to +\infty$, $\psi(x) \to 0$. Introducendo

$$\xi = \left(\frac{2mb}{\hbar^2}\right)^{1/3}\left(x - \frac{E}{b}\right) \equiv \alpha\left(x - \frac{E}{b}\right) \ , \qquad \alpha \equiv \left(\frac{2mb}{\hbar^2}\right)^{1/3} \tag{3}$$

la (2) diventa molto semplice

$$\psi'' - \xi\psi = 0 \ , \tag{4}$$

dove gli apici indicano differenziazione rispetto a ξ. Questa equazione non contiene più l'energia, di conseguenza, una volta ottenuta la sua soluzione che soddisfa le condizioni di finitezza, otterremo l'autofunzione per valori arbitrari dell'energia. Nonostante l'equazione differenziale sembri semplice, la sua soluzione è complicata, conviene quindi risolvere l'equazione agli autovalori per $\hat{H}$ nello spazio p.

Nello spazio degli impulsi l'equazione di Schrödinger con un potenziale di tipo (1) diviene

$$\left(\frac{p^2}{2m} + ib\hbar\frac{d}{dp} - E\right)\varphi_E(p) = 0 \ . \tag{5}$$

Questa equazione differenziale è del primo ordine e quindi la sua soluzione si trova facilmente ed è data da

$$\varphi_E(p) = Ae^{\frac{i}{\hbar b}\left(\frac{p^3}{6m} - Ep\right)} \ .$$

con $-\infty < E < +\infty$. La costante A si può determinare imponendo una normalizzazione ad una δ dell'energia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \varphi^*_{E'}(p)\varphi_E(p) = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar b}(E'-E)p} dp = \delta\left(E' - E\right) \ ,$$

che porta alla soluzione

$$|A|^2 b = \frac{1}{h} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar b}} \ .$$

Quindi le autofunzioni nello spazio x, normalizzate ad una δ dell'energia sono

$$\psi_E(x) = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \varphi_E(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}px} = \frac{1}{h\sqrt{b}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[\left(x - \frac{E}{b}\right)p + \frac{p^3}{6mb}\right]}$$

Ricordando la (3) e introducendo

$$t = \frac{p}{\hbar\alpha} \ ,$$

si ottiene[1]

$$\psi_E(x) = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{b}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\left(t\xi + \frac{t^3}{3}\right)} = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{b}}\int_0^{+\infty} dt\, \cos\left(t\xi + \frac{t^3}{3}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{b}}\mathrm{Ai}(\xi) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi b}}\phi(\xi) \tag{6}$$

dove $\mathrm{Ai}(\xi)$ è la funzione di Airy definita dall'integrale in (6). Gli andamenti asintotici della funzione di Airy sono dati da

$$\mathrm{Ai}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dt\, \cos\left(t\xi + \frac{t^3}{3}\right) \simeq \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\xi^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}} & \text{per } \xi \to +\infty \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\frac{2}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) & \text{per } \xi \to -\infty \end{cases}$$

La funzione di Airy è la soluzione regolare di (4) che si annulla esponenzialmente per $x \to +\infty$, oscilla nella regione classicamente permessa ed è esprimibile come integrale di Fourier. L'altra soluzione di (4) non è neanche esprimibile come integrale di Fourier ed è per questo che l'equazione trasformata di Fourier, la (5), è solo del primo ordine ed ha quindi una sola soluzione.

Un'altra soluzione di (4), linearmente indipendente, non accettabile fisicamente (e non esprimibile in integrale di Fourier) è data da

$$\mathrm{Bi}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dt\, \left\{e^{t\xi - \frac{t^3}{3}} + \sin\left(t\xi + \frac{t^3}{3}\right)\right\} \simeq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\xi^{\frac{1}{4}}}e^{\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}} & \text{per } \xi \to +\infty \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{2}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) & \text{per } \xi \to -\infty \end{cases} \ .$$

[1] Landau-Lifshitz, Vol. 3 §24, usa la $\phi(\xi)$ definita dalla: $\phi(\xi) = \sqrt{\pi}\mathrm{Ai}(\xi)$